

Esercitazione 3

Istruzioni trattate: error, ciclo while, printf.

Nella prima parte di questa esercitazione vedremo una realizzazione del *metodo di bisezione*. Nella seconda parte utilizzeremo la realizzazione per approssimare uno zero della funzione $f(x) = x^2 - 2$.

Prima parte

La definizione che segue è una realizzazione del *metodo di bisezione* che utilizza un criterio d'arresto di tipo assoluto. Le linee di commento immediatamente al di sotto dell'*intestazione* dichiarano lo scopo della funzione ed è buona norma inserirle.

```
function [z,v] = Bisezione(f,a,b,delta)
//
// Applica il metodo di bisezione alla funzione f a partire dall'intervallo
// [a,b]. L'iterazione si arresta quando la misura dell'ultimo intervallo
// calcolato è minore di delta (criterio di arresto di tipo assoluto)
// oppure si è trovato uno zero della funzione f.
//
// Ad ogni iterazione nella console vengono mostrati il numero dell'iterazione
// gli estremi e l'ampiezza dell'ultimo intervallo calcolato.
//
// La funzione restituisce l'approssimazione suggerita z e v = f(z).
//
if f(a)*f(b) > 0 then
    error('la funzione non assume valori di segno opposto agli estremi');
else
    x = (a+b)/2;
    k = 0;
    printf('k = %4.1f , a = %.2e , b = %.2e , ampiezza = %.3e\n', k,a,b,b-a);
    while ~(b-a) < delta | f(x) == 0,
        if sign(f(a)) ~= sign(f(x)) then b = x; else a = x; end;
        x = (a+b)/2;
        k = k + 1;
        printf('k = %4.1f , a = %.2e , b = %.2e , ampiezza = %.3e\n', k,a,b,b-a);
    end;
    z = x;
    v = f(z);
end;
endfunction
```

Nella definizione della procedura compaiono tre nuove istruzioni:

- **error**

Questa *funzione predefinita* ha lo scopo di *gestire un errore*. Precisamente, l'istruzione

```
error(<stringa descrittiva>)
```

ha due effetti: *interrompe l'esecuzione corrente e riporta l'interprete al livello del prompt e mostra* <stringa descrittiva> *nella console come parte di un messaggio di errore.*

- **ciclo while**

Questo costrutto predefinito consente di definire *iterazioni*. La sequenza:

```
while <condizione>, <istruzioni> end;
```

dove $\langle \text{condizione} \rangle$ è una funzione a valori in $\{T, F\}$, significa:

`finché $\langle \text{condizione} \rangle = T$, ripeti $\langle \text{istruzioni} \rangle$;`

Ad esempio:

```
-->i = 1; while i < 5, disp(i); i = i + 1; end;
```

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.

- **printf**

Questa *funzione predefinita* ha lo scopo di *stampare nella console una stringa contenente il valore di una o più espressioni*. Precisamente, se v_1, \dots, v_n sono n espressioni, e $\langle \text{frase} \rangle$ è una stringa che contiene n opportune sottostringhe $\langle \text{formato } 1 \rangle, \dots, \langle \text{formato } n \rangle$ dette *stringhe segnaposto*, ed eventuali altre opportune *sottostringhe atte alla formattazione* del testo da stampare, l'istruzione:

`printf($\langle \text{frase} \rangle, v_1, \dots, v_n$)`

stampa sulla console, con la formattazione specificata, la stringa che si ottiene sostituendo, in $\langle \text{frase} \rangle$, alla sottostringa $\langle \text{formato } i \rangle$ la stringa che rappresenta *l'arrotondato* del valore della i -esima espressione nell'insieme numerico e con il formato specificato dalla sottostringa stessa $\langle \text{formato } i \rangle$.

Ad esempio, si ha:

```
-->printf('\ne vale circa %12.3e, pi greco vale %5.3e\n\n...o quasi!','%e,%pi)
```

```
e vale circa      2.718e+00, pi greco vale 3.142e+00
```

```
...o quasi!
```

In questo caso sono presenti due *stringhe segnaposto* e due corrispondenti espressioni. Entrambe le *stringhe segnaposto* hanno la forma `%m.ne` con m ed n numeri interi positivi. Ciascuna delle *stringhe segnaposto* viene sostituita dalla stringa ottenuta (a) calcolando l'arrotondato ξ del valore dell'espressione corrispondente in $F(10, n + 1)$, (b) calcolando la frazione con segno g e l'esponente b di ξ in base dieci, (c) costruendo le stringhe σ_1 e σ_2 che rappresentano, in base dieci, rispettivamente $10g$ e $b - 1$ e, infine, (d) antepoendo alla stringa $\sigma_1\sigma_2$ il numero minimo di spazi necessario per ottenere una stringa di almeno m caratteri.

La stringa ottenuta dopo aver sostituito ciascuna delle *stringhe segnaposto* viene poi stampata nella console *interpretando* le *stringhe atte alla formattazione*. Nell'esempio è presente, tre volte, una sola di tali stringhe, `\n`, che comanda all'interprete di *andare a capo*.

I dettagli riguardanti le molte sottostringhe da usare per ottenere l'insieme numerico ed il formato di stampa desiderati si trovano nella pagina di *help* relativa al termine *printf_conversion*. Qualche altro esempio si trova negli esercizi finali.

Seconda parte

Consideriamo la seguente realizzazione della funzione $f(x) = x^2 - 2$:

```
function y = fun(x)
//
// x, y: matrici di numeri reali della stessa dimensione
//
y = x .^ 2 - 2;
endfunction
```

Per ottenere un'approssimazione dello zero positivo di f ($\sqrt{2} = 1.41421356237309504880\dots$)¹ con errore assoluto non superiore a 10^{-4} si applica la procedura `Bisezione` alla funzione `fun` a partire dall'intervallo $[0, 2]$ e con `delta = 10-4`. Si ottiene:

```
-->a = 0; b = 2; delta = 1d-4;

-->[z4,v4] = Bisezione(fun,a,b,delta)
k = 0 , a = 0.00e+00 , b = 2.00e+00 , ampiezza = 2.000e+00
k = 1 , a = 1.00e+00 , b = 2.00e+00 , ampiezza = 1.000e+00
k = 2 , a = 1.00e+00 , b = 1.50e+00 , ampiezza = 5.000e-01
k = 3 , a = 1.25e+00 , b = 1.50e+00 , ampiezza = 2.500e-01
k = 4 , a = 1.38e+00 , b = 1.50e+00 , ampiezza = 1.250e-01
k = 5 , a = 1.38e+00 , b = 1.44e+00 , ampiezza = 6.250e-02
k = 6 , a = 1.41e+00 , b = 1.44e+00 , ampiezza = 3.125e-02
k = 7 , a = 1.41e+00 , b = 1.42e+00 , ampiezza = 1.562e-02
k = 8 , a = 1.41e+00 , b = 1.42e+00 , ampiezza = 7.812e-03
k = 9 , a = 1.41e+00 , b = 1.42e+00 , ampiezza = 3.906e-03
k = 10 , a = 1.41e+00 , b = 1.42e+00 , ampiezza = 1.953e-03
k = 11 , a = 1.41e+00 , b = 1.42e+00 , ampiezza = 9.766e-04
k = 12 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 4.883e-04
k = 13 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 2.441e-04
k = 14 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 1.221e-04
k = 15 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 6.104e-05
v4 =

0.0000043
z4 =

1.4142151

-->printf('\nz4 = %16.15e , fun(z4) = %16.15e',z4,v4)

z4 = 1.414215087890625e+00 , fun(z4) = 4.314817488193512e-06
```

La procedura si arresta per aver determinato, dopo 15 iterazioni come prevedibile, un intervallo di ampiezza minore di 10^{-4} – il valore della funzione `fun` in `z4` è, infatti, diverso da zero. L'ultima istruzione stampa gli arrotondati in $F(10, 16)$ dei valori determinati di `z4` e `v4`. Si osservi che l'approssimazione suggerita dalla procedura soddisfa la richiesta: $|z4 - \sqrt{2}| < 10^{-5}$.

Per ottenere un'approssimazione dello stesso zero di f ma con errore assoluto non superiore a 10^{-8} si applica la procedura `Bisezione` alla funzione `fun` a partire dallo stesso intervallo ma con `delta = 10-8`. Si ottiene:

```
-->a = 0; b = 2; delta = 1d-8;

-->[z8,v8] = Bisezione(fun,a,b,delta)
k = 0 , a = 0.00e+00 , b = 2.00e+00 , ampiezza = 2.000e+00
k = 1 , a = 1.00e+00 , b = 2.00e+00 , ampiezza = 1.000e+00
k = 2 , a = 1.00e+00 , b = 1.50e+00 , ampiezza = 5.000e-01
k = 3 , a = 1.25e+00 , b = 1.50e+00 , ampiezza = 2.500e-01
k = 4 , a = 1.38e+00 , b = 1.50e+00 , ampiezza = 1.250e-01
k = 5 , a = 1.38e+00 , b = 1.44e+00 , ampiezza = 6.250e-02
k = 6 , a = 1.41e+00 , b = 1.44e+00 , ampiezza = 3.125e-02
k = 7 , a = 1.41e+00 , b = 1.42e+00 , ampiezza = 1.562e-02
k = 8 , a = 1.41e+00 , b = 1.42e+00 , ampiezza = 7.812e-03
k = 9 , a = 1.41e+00 , b = 1.42e+00 , ampiezza = 3.906e-03
k = 10 , a = 1.41e+00 , b = 1.42e+00 , ampiezza = 1.953e-03
k = 11 , a = 1.41e+00 , b = 1.42e+00 , ampiezza = 9.766e-04
```

¹La rappresentazione posizionale di $\sqrt{2}$ in base dieci è stata ricopiata dalla pagina di Wikipedia relativa al termine radice quadrata: https://it.wikipedia.org/wiki/Radice_quadrata

```

k = 12 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 4.883e-04
k = 13 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 2.441e-04
k = 14 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 1.221e-04
k = 15 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 6.104e-05
k = 16 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 3.052e-05
k = 17 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 1.526e-05
k = 18 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 7.629e-06
k = 19 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 3.815e-06
k = 20 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 1.907e-06
k = 21 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 9.537e-07
k = 22 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 4.768e-07
k = 23 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 2.384e-07
k = 24 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 1.192e-07
k = 25 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 5.960e-08
k = 26 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 2.980e-08
k = 27 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 1.490e-08
k = 28 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 7.451e-09
v8 =

```

```

5.300D-09
z8 =

```

```

1.4142136

```

```

-->printf('\nz8 = %16.15e , fun(z8) = %16.15e',z8,v8)

```

```

z8 = 1.414213564246893e+00 , fun(z8) = 5.299900962540960e-09

```

La procedura si arresta per aver determinato, dopo 28 iterazioni come prevedibile, un intervallo di ampiezza minore di 10^{-8} – il valore della funzione `fun` in `z8` è, anche questa volta, diverso da zero. Si osservi che anche questa volta l'approssimazione suggerita dalla procedura soddisfa la richiesta: $|z8 - \sqrt{2}| < 10^{-8}$.

Infine, per ottenere un'approssimazione dello stesso zero di f ma con errore assoluto non superiore a 10^{-16} si applica la procedura `Bisezione` alla funzione `fun` a partire dallo stesso intervallo ma con $\text{delta} = 10^{-16}$. Questa volta si ottiene:

```

-->a = 0; b = 2; delta = 1d-16;

```

```

-->[z16,v16] = Bisezione(fun,a,b,delta)
k = 0 , a = 0.00e+00 , b = 2.00e+00 , ampiezza = 2.000e+00
k = 1 , a = 1.00e+00 , b = 2.00e+00 , ampiezza = 1.000e+00
k = 2 , a = 1.00e+00 , b = 1.50e+00 , ampiezza = 5.000e-01
k = 3 , a = 1.25e+00 , b = 1.50e+00 , ampiezza = 2.500e-01
k = 4 , a = 1.38e+00 , b = 1.50e+00 , ampiezza = 1.250e-01
k = 5 , a = 1.38e+00 , b = 1.44e+00 , ampiezza = 6.250e-02
k = 6 , a = 1.41e+00 , b = 1.44e+00 , ampiezza = 3.125e-02
k = 7 , a = 1.41e+00 , b = 1.42e+00 , ampiezza = 1.562e-02
k = 8 , a = 1.41e+00 , b = 1.42e+00 , ampiezza = 7.812e-03
k = 9 , a = 1.41e+00 , b = 1.42e+00 , ampiezza = 3.906e-03
k = 10 , a = 1.41e+00 , b = 1.42e+00 , ampiezza = 1.953e-03
k = 11 , a = 1.41e+00 , b = 1.42e+00 , ampiezza = 9.766e-04
k = 12 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 4.883e-04
k = 13 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 2.441e-04
k = 14 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 1.221e-04
k = 15 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 6.104e-05
k = 16 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 3.052e-05
k = 17 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 1.526e-05
k = 18 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 7.629e-06
k = 19 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 3.815e-06

```

```

k = 20 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 1.907e-06
k = 21 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 9.537e-07
k = 22 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 4.768e-07
k = 23 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 2.384e-07
k = 24 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 1.192e-07
k = 25 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 5.960e-08
k = 26 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 2.980e-08
k = 27 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 1.490e-08
k = 28 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 7.451e-09
k = 29 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 3.725e-09
k = 30 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 1.863e-09
k = 31 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 9.313e-10
k = 32 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 4.657e-10
k = 33 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 2.328e-10
k = 34 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 1.164e-10
k = 35 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 5.821e-11
k = 36 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 2.910e-11
k = 37 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 1.455e-11
k = 38 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 7.276e-12
k = 39 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 3.638e-12
k = 40 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 1.819e-12
k = 41 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 9.095e-13
k = 42 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 4.547e-13
k = 43 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 2.274e-13
k = 44 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 1.137e-13
k = 45 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 5.684e-14
k = 46 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 2.842e-14
k = 47 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 1.421e-14
k = 48 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 7.105e-15
k = 49 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 3.553e-15
k = 50 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 1.776e-15
k = 51 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 8.882e-16
k = 52 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 4.441e-16
k = 53 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 2.220e-16
k = 54 , a = 1.41e+00 , b = 1.41e+00 , ampiezza = 2.220e-16

```

.

.

.

La procedura, apparentemente, *non si arresta* finché l'utilizzatore non obbliga *Scilab* ad interrompere l'esecuzione del comando selezionando, dalla finestra della console, il comando *Annulla* dalla tendina *Controllo*. Questo significa che *il criterio di arresto scelto per la procedura è inefficace*. In base all'analisi della procedura che utilizza il tipo *numero reale*, il criterio di arresto risulta *efficace*, ovvero la costruzione delle successioni viene interrotta *in ogni caso* dopo un numero finito di iterazioni. Per capire come mai questo non accade in *Scilab*, occorre analizzare la procedura trasformata che utilizza il tipo *numero in virgola mobile e precisione finita*.

Da un'osservazione più attenta delle righe scritte dalla procedura nella console si nota che dopo 53 iterazioni il valore dell'ampiezza (apparentemente) *non cambia* ed è maggiore di *delta*.

