Appunti di Calcolo Numerico

Capitolo 1

Zeri di funzione

Maurizio Ciampa

Dipartimento di Matematica - Università di Pisa

Gli esercizi contrassegnati dal simbolo ★ sono leggermente più astratti rispetto agli altri. Quelli contrassegnati dal simbolo ♠ richiedono direttamente, o comunque riguardano, l'uso del calcolatore. A chi legge si raccomanda di riprodurre al calcolatore i "dialoghi" con *Scilab* proposti e di prendere spunto da essi per crearne di nuovi (per ottenere *Scilab* visitare la pagina `https://www.scilab.org/`).

1 Zeri di funzione

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua ed $\alpha \in [a,b]$ uno zero di f. In questo Capitolo affrontiamo il problema di *determinare un'approssimazione accurata di* α.

Una *condizione sufficiente* per l'esistenza di *almeno uno* zero di f è data dal seguente:

1.1 Teorema (di esistenza degli zeri)
Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione *continua*. Se $f(a)\, f(b) < 0$ allora esiste $\alpha \in (a,b)$ zero di f.

– *Esempio*

Sia $f(x) = e^{x^2} - 2$.

La funzione è continua su $[0,1]$ e $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = e - 2 > 0$: il Teorema di esistenza degli zeri assicura l'esistenza di *almeno uno* zero di f in $(0,1)$.

La funzione è continua su $[-1,1]$ ma $f(-1) = e - 2 > 0$ e $f(1) > 0$: il Teorema di esistenza degli zeri *non è applicabile* e quindi non fornisce informazioni sull'esistenza di zeri di f in $(-1,1)$. La funzione è pari dunque, per quanto osservato sopra, ha certamente qualche zero in $(-1,1)$.

1.1 Metodo di bisezione

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione *continua* tale che $f(a)\, f(b) < 0$. Il Teorema precedente assicura l'*esistenza* di uno zero di f in (a,b). Il primo metodo che consideriamo per approssimare lo zero è il *metodo di bisezione*, basato sul Teorema appena enunciato. Si tratta di un metodo *iterativo*, ovvero che determina l'oggetto cercato costruendo *una successione*. La procedura seguente, descritta in un linguaggio che utilizza il tipo *numero reale*, realizza il metodo:

- $z = \mathit{Bisezione}(f, a, b)$

  // $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continua* tale che $f(a)f(b) < 0$.

  // k è il contatore delle iterazioni eseguite.

  $k = 0;$

  $a_0 = a; b_0 = b; x_0 = (a_0 + b_0)/2;$

  `ripeti`:

  `se` $f(x_k) = 0$ `allora` esci dal ciclo;
  `se` $f(x_k)f(b_k) < 0$ `allora` $a_{k+1} = x_k; b_{k+1} = b_k;$
  `se` $f(a_k)f(x_k) < 0$ `allora` $a_{k+1} = a_k; b_{k+1} = x_k;$
  $x_{k+1} = (a_{k+1} + b_{k+1})/2;$
  $k = k + 1;$

  $z = x_k$

La procedura opera in questo modo: Se per qualche k si ha $f(x_k) = 0$, allora essa *termina* e restituisce uno zero di f. Se, invece, per ogni k si ha $f(x_k) \neq 0$, allora essa *non termina* e genera *due* successioni: la successione di intervalli $I_k = [a_k, b_k]$ e la successione di numeri reali x_k, *punti medi* degli intervalli I_k.

Per ciascun k si ha:

– I_k contiene, per costruzione, almeno uno zero di f

– $I_{k+1} \subset I_k$

– $\operatorname{mis} I_k = \dfrac{\operatorname{mis} I_0}{2^k}$

Dalla terza proprietà segue:

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{mis} I_k = 0$$

dunque la successione di intervalli "individua con incertezza tendente a zero" uno zero di f.

Si ha inoltre:

1.2 Osservazione (convergenza delle successioni)

Le successioni a_k, b_k ed x_k sono convergenti ed hanno lo stesso limite. Detto α tale limite si ha: α è zero di f.

Infatti: Per costruzione la successione a_k risulta *monotona non decrescente* e *superiormente limitata* (da b), dunque convergente: $\lim a_k = A$. Analogamente: la successione b_k risulta *monotona non crescente* e *inferiormente limitata* (da a), dunque convergente: $\lim b_k = B$. La successione $\operatorname{mis} I_k = b_k - a_k$ è allora differenza di successioni convergenti e quindi:

$$0 = \lim \operatorname{mis} I_k = \lim(b_k - a_k) = B - A \qquad \text{dunque} \qquad A = B$$

Posto $\alpha = A$, poiché $a_k < x_k < b_k$ si ha $\lim x_k = \alpha$.

Infine, sia ad esempio: $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Per ogni k si ha: $f(a_k) < 0$ e $f(b_k) > 0$. Tenuto conto anche della continuità di f:

$$\lim f(a_k) = f(\alpha) \leqslant 0 \qquad \text{e} \qquad \lim f(b_k) = f(\alpha) \geqslant 0$$

e quindi $f(\alpha) = 0$.

1.3 Esercizio

Sia:

$$f(x) = \frac{1}{x - \sqrt{2}}$$

Discutere l'assegnamento $z = \mathit{Bisezione}(f, 0, 2)$.

La funzione f è definita e continua sull'unione $\Omega = [0, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 2]$ e *non*, come richiesto dal commento della procedura *Bisezione*, su $[0, 2]$. Però per ogni k si ha: a_k, b_k e perciò x_k sono numeri razionali in $[0, 2]$ dunque in Ω. Allora la procedura *non termina* (si ha sempre $f(x_k) \neq 0$, infatti f *non ha zeri* in Ω). Le successioni a_k, b_k e x_k che la procedura costruisce sono ancora convergenti ad un limite comune α (come mostra la prima parte della dimostrazione dell'Osservazione precedente). Inoltre, se fosse $\alpha \neq \sqrt{2}$ la funzione f sarebbe continua in α e quindi si avrebbe $f(\alpha) = 0$. Ma, come già detto, f non ha zeri in Ω. *La procedura individua il punto in cui f "cambia segno"*.

L'Osservazione 1.2 mostra che la procedura *Bisezione* (come tutte le procedure che realizzano metodi iterativi) determina uno zero di f come *limite* di una successione. Come abbiamo detto nella parte introduttiva del Capitolo 0, le procedure descritte saranno eseguite da un calcolatore. Una procedura che costruisce *tutta* una successione *non è accettabile* in questo contesto perché il calcolatore impiegherebbe un *tempo infinito* per eseguirla (il calcolatore impiega un tempo *non infinitesimo* per calcolare *ciascun elemento* della successione). Per rendere *finito* in ogni caso il tempo di esecuzione, è necessario *interrompere* la costruzione della successione. Così facendo la procedura determinerà, con l'ultimo elemento calcolato della successione, solo *un'approssimazione* di uno zero di f. La costruzione della successione deve essere interrotta *quando l'ultimo elemento costruito approssima lo zero di f con sufficiente accuratezza.* A questo scopo si introduce nella procedura un *criterio d'arresto.*

1.4 Esempio (criterio d'arresto di tipo assoluto)

Assegnato un numero reale positivo δ, un comune esempio di criterio d'arresto è:

se $\operatorname{mis} I_k < \delta$ *allora* arresta la costruzione

ovvero: "arresta la costruzione se l'ultimo intervallo calcolato è sufficientemente piccolo." Il criterio d'arresto è introdotto nella procedura *Bisezione* modificandola come segue:

- $z = \mathit{Bisezione}(f, a, b, \delta)$

  // $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tale che $f(a)f(b) < 0$, δ numero reale positivo.

  // k è il contatore delle iterazioni eseguite.

  $k = 0$;

  $a_0 = a; b_0 = b; x_0 = (a_0 + b_0)/2$;

  `ripeti`:

  `se` $\big(f(x_k) = 0$ `oppure` $b_k - a_k < \delta\big)$ `allora` esci dal ciclo;
  `se` $f(x_k)f(b_k) < 0$ `allora` $a_{k+1} = x_k; b_{k+1} = b_k$;

$\texttt{se}\ f(a_k)f(x_k) < 0\ \texttt{allora}\ a_{k+1} = a_k; b_{k+1} = x_k;$
$x_{k+1} = (a_{k+1} + b_{k+1})/2;$
$k = k + 1;$

$z = x_k$

Un criterio d'arresto è in generale definito da *un'opportuna condizione* sugli elementi della successione calcolati dalla procedura. La costruzione della successione verrà interrotta *appena* e *solo se* la condizione risulterà soddisfatta.

1.5 Osservazione (proprietà di un criterio d'arresto)
La condizione che definisce il criterio d'arresto deve avere le proprietà seguenti:

- Essere *calcolabile*: ad ogni iterazione la procedura *deve* essere in grado di verificare se la condizione è soddisfatta.
- Essere *efficace*: in ogni caso la condizione *deve* essere soddisfatta dopo un numero *finito* di iterazioni.
- Quando la condizione è soddisfatta la procedura *deve* restituire un elemento che *approssima l'oggetto cercato con l'accuratezza richiesta* dall'utilizzatore.

Il criterio d'arresto proposto nell'Esempio 1.4 *soddisfa* le tre proprietà: *è calcolabile*, infatti a ciascuna iterazione la procedura conosce a_k e b_k, può calcolare $\operatorname{mis} I_k = b_k - a_k$ e verificare se è minore del valore δ fornito dall'utilizzatore; *è efficace*, infatti si ha $\lim \operatorname{mis} I_k = 0$ e per ogni $\delta > 0$ la disuguaglianza $\operatorname{mis} I_k < \delta$ è *certamente* soddisfatta dopo un numero *finito* di iterazioni. Infine, quando il criterio di arresto è soddisfatto la procedura restituisce x_k, punto medio dell'ultimo intervallo calcolato I_k, e tale intervallo, per costruzione, contiene almeno uno zero α di f. Si ha allora:

$$|\, x_k - \alpha \,| \leqslant \frac{\operatorname{mis} I_k}{2} < \tfrac{1}{2}\,\delta < \delta$$

ovvero la procedura restituisce un valore che approssima uno zero di f con *errore assoluto* minore di δ. Il criterio verifica dunque la terza proprietà a patto che l'utilizzatore misuri l'accuratezza con l'errore assoluto. Per questo motivo il criterio d'arresto proposto è classificato *di tipo assoluto*.

- *Esempi*

  Un criterio d'arresto che è calcolabile e restituisce un valore che approssima uno zero di f con l'accuratezza richiesta *ma non è efficace*, è il seguente:

  $$\textit{se}\ f(x_k) = 0\ \textit{allora}\ \text{arresta la costruzione}$$

  Un criterio d'arresto che è efficace e restituisce un valore che approssima uno zero di f con l'accuratezza richiesta *ma non è calcolabile*, è il seguente. Sia α uno zero di f in $[a, b]$ e δ un numero reale positivo:

  $$\textit{se}\ |\, x_k - \alpha \,| < \delta\ \textit{allora}\ \text{arresta la costruzione}$$

  La procedura *non conosce* α e quindi non può verificare se la condizione è soddisfatta.

1.6 Esercizio
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(a)f(b) < 0$. La procedura:

$$z = \textit{Bisezione}\,(f, a, b, \delta)$$

restituisce un'approssimazione di uno zero di f in $[a, b]$ dopo aver eseguito k iterazioni. Si vuole determinare k.

Se la procedura termina trovando uno zero di f, il numero di iterazioni eseguite è in generale imprevedibile. Se invece la procedura termina perchè l'ultimo intervallo costruito ha misura minore di δ allora:

$$\operatorname{mis} I_k = \frac{\operatorname{mis} I_0}{2^k} < \delta \quad \Rightarrow \quad k > \log_2 \operatorname{mis} I_0 - \log_2 \delta$$

La procedura si arresta dopo aver eseguito:

$$k = \lfloor \log_2 \operatorname{mis} I_0 - \log_2 \delta \rfloor + 1$$

iterazioni.[1]

Ad esempio, se $\operatorname{mis} I_0 = 2$ e $\delta = 10^{-10}$ si ha:

$$k = \lfloor 1 + 10 \log_2 10 \rfloor + 1 = 35$$

Inoltre, fissato $\operatorname{mis} I_0$, il valore di k tende a infinito come $\log_2 \delta$.

In generale: *tanto più accurata* l'utilizzatore vuole che sia l'approssimazione richiesta, *tante più iterazioni* deve eseguire la procedura (cioè: *tanto più impegnativo* è ottenere l'approssimazione).

1.7 Esempio (criterio d'arresto di tipo relativo)

Il criterio d'arresto utilizzato nella procedura *Bisezione* (f, a, b, δ) è stato classificato di *tipo assoluto* perchè l'ultimo elemento calcolato della successione approssima uno zero di f con l'accuratezza richiesta *a patto* che l'utilizzatore misuri l'accuratezza con l'*errore assoluto*. Un criterio di *tipo relativo*, adatto quindi se l'utilizzatore misura l'accuratezza con l'*errore relativo*, è il seguente. Dato ϵ numero reale positivo e posto $m_k = \min\{\, |\, a_k \,|, |\, b_k \,|\,\}$:

$$\textit{se } \frac{\operatorname{mis} I_k}{m_k} < \epsilon \textit{ allora } \text{arresta la costruzione}$$

Il criterio, in quanto di tipo relativo, è utilizzabile *solo* quando la procedura approssima uno zero *non nullo* di f e in tal caso si può supporre che sia:

$$0 \notin I_0 = [a, b]$$

e quindi $0 \notin I_k$ (che assicura $m_k \neq 0$) per ogni k. Il criterio d'arresto è introdotto nella procedura *Bisezione* modificandola come segue:

- $z = \textit{Bisezione}\,(f, a, b, \epsilon)$

  // $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tale che $f(a)f(b) < 0$, ϵ numero reale positivo.

  // k è il contatore delle iterazioni eseguite.

  $k = 0$;

  $a_0 = a; b_0 = b; x_0 = (a_0 + b_0)/2; m_0 = \min\{\, |\, a_0 \,|, |\, b_0 \,|\,\}$;

  `ripeti`:

      `se` $\big(f(x_k) = 0$ `oppure` $(b_k - a_k)/m_k < \epsilon\big)$ `allora` esci dal ciclo;

      `se` $f(x_k)f(b_k) < 0$ `allora` $a_{k+1} = x_k; b_{k+1} = b_k$;

      `se` $f(a_k)f(x_k) < 0$ `allora` $a_{k+1} = a_k; b_{k+1} = x_k$;

      $x_{k+1} = (a_{k+1} + b_{k+1})/2$;

      $m_{k+1} = \min\{\, |\, a_{k+1} \,|, |\, b_{k+1} \,|\,\}$;

      $k = k + 1$;

  $z = x_k$

Il criterio è *calcolabile*: a ciascuna iterazione la procedura conosce a_k e b_k, sa calcolare m_k e verificare se la disuguaglianza è soddisfatta. Il criterio è anche *efficace*, infatti:

$$\operatorname{mis} I_k \to 0 \quad \text{e} \quad m_k \geqslant m_0 > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim \frac{\operatorname{mis} I_k}{m_k} = 0$$

dunque per ogni $\epsilon > 0$ la disuguaglianza è certamente verificata dopo un numero finito di iterazioni. Infine, quando il criterio di arresto è verificato la procedura restituisce x_k, punto medio dell'ultimo intervallo calcolato I_k. Tale intervallo, per costruzione, contiene almeno uno zero $\alpha \neq 0$ di f e si ha:

$$|\, \alpha \,| > m_k \qquad \text{e quindi} \qquad \frac{|\, x_k - \alpha \,|}{|\, \alpha \,|} < \frac{\operatorname{mis} I_k}{m_k} < \epsilon$$

[1] Se t è un numero reale positivo, $\lfloor t \rfloor$ è la *parte intera* di t: il più grande intero minore o uguale di t. Dunque $\lfloor t \rfloor + 1$ è il più piccolo intero maggiore di t.

ovvero la procedura restituisce un valore che approssima uno zero di f con *errore relativo* minore di ϵ.

Discutiamo adesso l'esecuzione in *Scilab* delle procedure che realizzano il metodo di bisezione assumento per semplicità $M = F(2, 53)$.

1.8 Osservazione (procedure che usano il tipo *numero in virgola mobile e precisione finita*)
La trasformazione delle procedure descritta nel Capitolo 0 evidenzia che:

- Le successioni di numeri reali a_k, b_k – che definiscono gli intervalli I_k – sono sostituite da successioni α_k, β_k di *elementi di* M – che definiscono gli intervalli $J_k = [\alpha_k, \beta_k]$;
- Le successioni α_k e β_k sono costruite considerando la successione ξ_k di *elementi di* M definita da:
$$\xi_k = (\alpha_k \oslash 2) \oplus (\beta_k \oslash 2) \qquad \text{oppure} \qquad \xi_k = (\,\alpha_k \oplus \beta_k\,) \oslash 2$$
in luogo della successione x_k di numeri reali definita da:
$$x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$$
- Si utilizza un *algoritmo* ϕ, scelto dall'utilizzatore, per *approssimare* i valori di f;
- La condizione che definisce il criterio d'arresto è realizzata utilizzando ϕ e pseudo-operazioni aritmetiche in luogo di f ed operazioni aritmetiche.

In particolare:

- Lo zero verrà cercato in un intervallo J_0 potenzialmente diverso da $[a, b]$.
- L'elemento $\xi_k \in M$ è l'arrotondato del punto medio dell'intervallo J_k.[2]
- L'intervallo J_{k+1} viene scelto in base al valore di $\phi(\xi_k)$. Se l'errore relativo commesso approssimando $f(\xi_k)$ con $\phi(\xi_k)$ è *maggiore di* -1 allora $f(\xi_k)$ e $\phi(\xi_k)$ hanno lo *stesso segno* altrimenti hanno *segno diverso*. Solo nel primo caso la scelta dell'intervallo avviene in modo *coerente* con il segno di $f(\xi_k)$.
- La procedura si arresta se $\phi(\xi_k) = 0$. *Non è certo* che in tal caso ξ_k sia uno zero di f.
- La disuguaglianza del criterio d'arresto di tipo assoluto sarà realizzata da:
$$\beta_k \ominus \alpha_k < \mathrm{rd}(\delta)$$
Poiché:
$$\beta_k \ominus \alpha_k < \mathrm{rd}(\delta) \quad \Rightarrow \quad \beta_k - \alpha_k < \delta$$
quando il criterio d'arresto è verificato si ha: $\operatorname{mis} J_k < \delta$. Dunque, *se* J_k contiene α zero di f vale:
$$|\,\xi_k - \alpha\,| \leqslant \beta_k - \alpha_k < \delta$$
ovvero *la procedura restituisce un valore che approssima uno zero di f con l'accuratezza richiesta dall'utilizzatore.*
- La disuguaglianza del criterio d'arresto di tipo relativo sarà realizzata, dopo aver posto:
$$\mu_k = \min\{\,|\,\alpha_k\,|, |\,\beta_k\,|\,\}$$
da:
$$(\beta_k \ominus \alpha_k) \oslash \mu_k < \mathrm{rd}(\epsilon)$$
Si ha:
$$(\beta_k \ominus \alpha_k) \oslash \mu_k < \mathrm{rd}(\epsilon) \quad \Rightarrow \quad \frac{\beta_k \ominus \alpha_k}{\mu_k} < \epsilon$$

[2] Si vedano, al riguardo, gli Esercizi *E4*, *E5* e *E6*.

Per definizione si ha anche:

$$\beta_k \ominus \alpha_k = \mathrm{rd}(\beta_k - \alpha_k) = (1+t)(\beta_k - \alpha_k) \quad \text{con} \quad |\,t\,| \leqslant u$$

ovvero:

$$(1-u)(\beta_k - \alpha_k) \leqslant \beta_k \ominus \alpha_k \leqslant (1+u)(\beta_k - \alpha_k)$$

Se ne conclude che certamente vale:

$$\frac{\beta_k - \alpha_k}{\mu_k} < \frac{\epsilon}{1-u}$$

Quando il criterio d'arresto è verificato si ha quindi: *se* J_k contiene α zero di f:

$$\left| \frac{\xi_k - \alpha}{\alpha} \right| \leqslant \frac{\beta_k - \alpha_k}{\mu_k} < \frac{\epsilon}{1-u} \approx \epsilon$$

ovvero, anche in questo caso *la procedura restituisce un valore che approssima uno zero di f con l'accuratezza richiesta dall'utilizzatore.*

L'esempio che segue mostra, però, che nell'esecuzione al calcolatore il criterio d'arresto di tipo assoluto (ma lo stesso vale per quello di tipo relativo) *può risultare non efficace.*

1.9 Esempio

Sia $f(x) = x^2 - 2$. Se, posto $\delta = 10^{-16}$, si esegue l'assegnamento:

$$z = \mathit{Bisezione}\,(f, 0, 2, \delta)$$

con *Scilab*, la procedura *non termina*: il criterio d'arresto risulta *non efficace.*

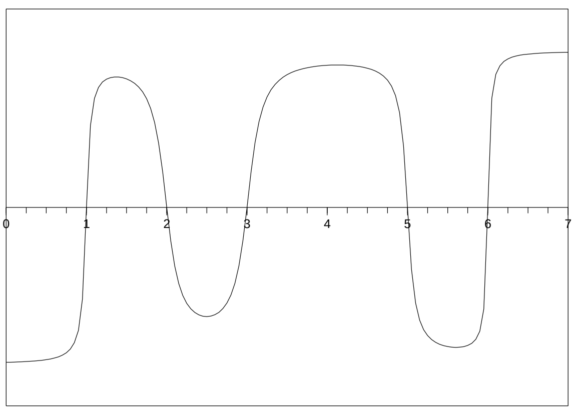
Il problema è questo (si ricordi che si è scelto $M = F(2,53)$): si è chiesto alla procedura di determinare un intervallo *ad estremi elementi di M, contenente* $\sqrt{2}$ e *di misura minore di δ.*[3] Ma *il più piccolo* intervallo che ha le prime due delle proprietà richieste è quello che ha per estremi i due elementi di M *adiacenti* a $\sqrt{2}$. Poiché l'esponente di $\sqrt{2}$ in base due è *uno*, la misura di tale intervallo (la distanza tra i due numeri di macchina) è $\beta^{b-m} = 2^{1-53} \approx 2.22\,10^{-16}$, *maggiore* di δ.

La procedura *non può* trovare un intervallo sufficientemente piccolo e quindi *non termina.* In generale, detto b l'esponente dello zero di f che si vuole approssimare, l'utilizzatore *deve* assegnare al parametro δ un valore maggiore di $2^{b-53} = 2^b\,u$.

Esercizi

E1 Sia $f(x) = 1/x$, definita per $x \neq 0$. La funzione è *continua* nel suo insieme di definizione e $f(-1) < 0$, $f(1) > 0$. Perché non possiamo concludere, in base al Teorema di esistenza degli zeri, che f ha almeno uno zero in $(-1, 1)$?

E2 Il grafico della funzione $f : [0, 7] \to \mathbb{R}$ è rappresentato nella figura seguente.



[3]Se la procedura termina restituendo ξ_k con $\phi(\xi_k) \neq 0$ allora è verificata la condizione $\alpha_k \ominus \beta_k < \mathrm{rd}(\delta)$. Ma, come mostrato sopra, in tal caso si ha: mis $J_k < \delta$.

Sia x_k la successione costruita dalla procedura *Bisezione*$(f, 0, 7)$. Determinare $\lim_{k\to\infty} x_k$.

E3 Sia $f(x) = x^3 - 2$.

(1) Determinare analiticamente gli zeri di f.

(2) Determinare *Bisezione*$(f, 0, 2, \frac{1}{2})$.

E4 Siano $M = F(2, m)$ e $\alpha, \omega \in M$. Dimostrare che:

$$\xi = (\alpha \oslash 2) \oplus (\omega \oslash 2) = \mathrm{rd}\Big(\frac{\alpha + \omega}{2}\Big)$$

Dunque ξ è *l'arrotondato del punto medio* dell'intervallo $[\alpha, \omega]$. Dimostrare che, allora:

$$\alpha \leqslant \xi \leqslant \omega$$

E5 ★ Siano β un numero intero pari e rd una funzione arrotondamento in $F(\beta, m)$. Si supponga noto che per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{Z}$ si ha:

$$\mathrm{rd}(\beta^b x) = \beta^b\, \mathrm{rd}(x)$$

Siano $M = F(2, m)$ e $\alpha, \omega \in M$. Dimostrare che:

$$\theta = (\alpha \oplus \omega) \oslash 2 = \mathrm{rd}\Big(\frac{\alpha + \omega}{2}\Big)$$

ovvero che θ è *l'arrotondato del punto medio* dell'intervallo $[\alpha, \omega]$.

E6 Siano $M = F(10, 6)$, $\alpha = 0.742531$ e $\omega = 0.742533$. Calcolare:

$$\gamma = (\alpha \oplus \omega) \oslash 2$$

e constatare che $\gamma < \alpha$.

E7 ★ Siano β un numero intero pari, x un numero reale positivo e b un numero intero. Dimostrare che, detta rd la funzione arrotondamento in $F(\beta, m)$, si ha:

$$\mathrm{rd}(\beta^b x) = \beta^b\, \mathrm{rd}(x) \qquad (*)$$

Soluzione.

Se $x \in F(\beta, m)$ anche $\beta^b x \in F(\beta, m)$ e l'uguaglianza $(*)$ è verificata: $\mathrm{rd}(\beta^b x) = \beta^b x = \beta^b \mathrm{rd}(x)$.

Se $x \notin F(\beta, m)$, siano ξ e $\sigma(\xi)$ gli elementi di $F(\beta, m)$ *adiacenti* ad x. Detti n l'esponente e γ la frazione di ξ si ha:

(a) $\beta^b \xi < \beta^b x < \beta^b \sigma(\xi) = \beta^b \sigma(\beta^n \gamma) = \beta^{b+n}(\gamma + \beta^{-m}) = \sigma(\beta^b \xi)$

(b) $|\, x - \xi\, | \gtreqless |\, x - \sigma(\xi)\, |$ se e solo se $|\, \beta^b x - \beta^b \xi\, | \gtreqless |\, \beta^b x - \sigma(\beta^b \xi)\, | \,\big(= |\, \beta^b x - \beta^b \sigma(\xi)\, |\big)$

(c) Per ogni $\theta \in F(\beta, m)$ la frazione di $\beta^b \theta$ è uguale a quella di θ.

L'asserto (a) significa che $\beta^b \xi$ e $\sigma(\beta^b \xi)$ sono gli elementi di $F(\beta, m)$ *adiacenti* a $\beta^b x$; l'asserto (b) dimostra l'uguaglianza $(*)$ nel caso di elementi adiacenti *non* equidistanti e l'asserto (c) nel caso di elementi adiacenti equidistanti.

E8 Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione, $x \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \neq 0$ e ϕ l'algoritmo utilizzato per approssimare il valore di f in x. Sia infine e l'errore relativo commesso approssimando $f(x)$ con $\phi(x)$. Dimostrare che $f(x)$ e $\phi(x)$ hanno lo *stesso segno* se e solo se $e > -1$.

E9 ♠ Sia `Bisezione` la procedura *Scilab* realizzata nella prima parte dell'Esercitazione 3 e f la funzione definita da $f(x) = \mathrm{sen}\, x$.

(1) Dopo aver definito la funzione di intestazione:

```
function y = S(x)
```

che realizza f ed assegnato alla variabile `u` il valore della precizione di macchina, constatare che dopo l'assegnamento:

```
[z,v] = Bisezione(S,2,4,5*u)
```

il valore di `z` è $\mathrm{rd}(\pi)$.

(2) Spiegare perché l'esecuzione dell'assegnamento precedente *termina* mentre quella dell'assegnamento:

```
[z,v] = Bisezione(S,2,4,4*u)
```

non termina.

E10 Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $0 \notin [a, b]$ e $f(a)f(b) < 0$ e *Bisezione* la procedura descritta nell'Esempio 1.7. L'assegnamento:

$$z = \mathit{Bisezione}\,(f, a, b, \epsilon)$$

restituisce un'approssimazione di uno zero di f in $[a, b]$, con $f(z) \neq 0$, dopo aver eseguito k iterazioni. Determinare k.

1.2 Metodi ad un punto

Sia $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione *continua*. La procedura seguente, descritta in un linguaggio che utilizza il tipo *numero reale*, realizza il *metodo iterativo ad un punto definito da h*:

- $z = \mathit{MetodoUnPunto}\,(h, \gamma)$

  // $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ funzione *continua*, $\gamma \in [a, b]$.

  $x_0 = \gamma$;

  $k = 0$;

  `ripeti`:

  `se` $x_k \notin [a, b]$ `allora` esci dal ciclo;
  $x_{k+1} = h(x_k)$;
  $k = k + 1$;

  $z = x_k$

La procedura opera in questo modo: Se per qualche k si ha $x_k \notin [a, b]$ allora essa *termina*. Se, invece, per ogni k si ha $x_k \in [a, b]$ allora essa *non termina* e costruisce una successione di numeri reali $x_k \in [a, b]$. Inoltre:

1.10 Osservazione

Se la procedura MetodoUnPunto (h, γ) *genera una successione* x_k *convergente, allora il limite della successione è un punto unito di* h *in* $[a, b]$.[4]

Dimostrazione: Sia α il limite della successione x_k. La successione $h(x_0), h(x_1), \ldots,$ per la continuità di h, è convergente e $\lim h(x_k) = h(\alpha)$. Ma le successioni $x_1, x_2, \ldots$ e $h(x_0), h(x_1), \ldots$ sono *identiche* e quindi hanno lo stesso limite, ovvero $\alpha = h(\alpha)$.

Dunque: *il metodo ad un punto definito da h determina i punti uniti di h generando successioni ad essi convergenti.*

Sia f la funzione della quale si vuole approssimare uno zero. *Se* una funzione continua h è tale che:

$$\text{insieme degli } \textit{zeri} \text{ di } f \quad = \quad \text{insieme dei } \textit{punti uniti} \text{ di } h$$

[4] Si ricordi che un *punto unito* di una funzione $h : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}$, è un numero reale $\alpha \in \Omega$ che verifica la relazione: $\alpha = h(\alpha)$.

allora è *ragionevole* tentare di utilizzare il metodo ad un punto definito da h per approssimare gli zeri di f.

Assegnata f esistono *infinite* funzioni h che hanno la proprietà richiesta.

1.11 Esempio

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione *continua*.

- La funzione $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ definita da: $h(x) = x - f(x)$ è continua (perchè lo è f) e si ha:

$$f(\alpha) = 0 \Rightarrow h(\alpha) = \alpha - f(\alpha) = \alpha$$

  e:

$$\alpha = h(\alpha) \Rightarrow \alpha = \alpha - f(\alpha) \Rightarrow f(\alpha) = 0$$

- Sia $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che:

$$\text{per ogni } x \in [a, b] \text{ si ha } g(x) \neq 0$$

  Allora la funzione $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ definita da: $h(x) = x - g(x)f(x)$ è continua e $\alpha \in [a, b]$ è punto unito di h se e solo se è zero di f. (*Esercizio*: dimostrare l'asserto.)

Una volta scelta la funzione h, ci si domanda se esista, ed eventualmente come individuare, qualche valore di γ a partire dal quale la successione generata dal metodo iterativo definito da h risulti *convergente*.

Il Teorema seguente fornisce *condizioni sufficienti* affinché la procedura *MetodoUnPunto* (h, γ) generi una successione convergente.

1.12 Teorema (di convergenza)

Siano $[a, b]$ un intervallo, $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione *con derivata prima continua* e γ un elemento di $[a, b]$ tali che:

(1) esiste α punto unito di h in $[a, b]$;

(2) esiste $L \in [0, 1)$ tale che per ogni $x \in [a, b]$ si ha: $|\, h'(x) \,| \leqslant L$;

(3) la procedura *MetodoUnPunto* (h, γ) genera una successione x_k in $[a, b]$.

Allora: (i) α è l'*unico* punto unito di h in $[a, b]$ e (ii) la successione x_k è *convergente* ad α.

Dimostrazione. (i) Per assurdo: se $\beta \neq \alpha$ è un altro punto unito di h in $[a, b]$ si ha:

$$\beta - \alpha = h(\beta) - h(\alpha)$$

Per il Teorema di Lagrange esiste un numero reale θ compreso tra α e β, e quindi $\theta \in [a, b]$, tale che:

$$h(\beta) - h(\alpha) = h'(\theta)(\beta - \alpha)$$

ovvero:

$$\beta - \alpha = h'(\theta)(\beta - \alpha)$$

Essendo $\beta - \alpha \neq 0$, l'uguaglianza precedente sussiste *se e solo se* $h'(\theta) = 1$. Questo contraddice l'ipotesi (2).

(ii) Dimostriamo che la successione $x_k - \alpha$ converge a zero. Sia k un intero positivo. Allora:

$$x_k - \alpha = h(x_{k-1}) - h(\alpha)$$

Per il Teorema di Lagrange esiste un numero reale θ_{k-1} compreso tra x_{k-1} e α, e quindi $\theta_{k-1} \in [a, b]$, tale che:

$$h(x_{k-1}) - h(\alpha) = h'(\theta_{k-1})(x_{k-1} - \alpha)$$

ovvero:

$$x_k - \alpha = h'(\theta_{k-1})(x_{k-1} - \alpha)$$

Allora, utilizzando l'ipotesi (2):

$$|\, x_k - \alpha \,| = |\, h'(\theta_{k-1}) \,|\, |\, x_{k-1} - \alpha \,| \leqslant L \,|\, x_{k-1} - \alpha \,|$$

Ripetendo il ragionamento a partire da $x_{k-1} - \alpha$ si ottiene:

$$|\, x_{k-1} - \alpha \,| \leqslant L \,|\, x_{k-2} - \alpha \,|$$

e quindi:

$$|\, x_k - \alpha \,| \leqslant L^2 \,|\, x_{k-2} - \alpha \,|$$

Iterando all'indietro si ha infine:

$$0 \leqslant |\, x_k - \alpha \,| \leqslant L^k \,|\, x_0 - \alpha \,|$$

Poiché $L < 1$ la successione $L^k \,|\, x_0 - \alpha \,|$, e quindi $|\, x_k - \alpha \,|$, tende a zero.

Il ruolo del numero reale γ (il *valore iniziale* della successione) nel Teorema precedente è di garantire il sussistere dell'ipotesi (3), ovvero che il metodo definito da h generi una successione in $[a, b]$. L'Osservazione che segue fornisce, sotto opportune ipotesi, *un valore* che soddisfa la richiesta.

1.13 Osservazione (Criterio di scelta del valore iniziale per metodi ad un punto)

Siano $[a, b]$ un intervallo ed $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione con derivata prima continua che verificano le ipotesi (1) e (2) del Teorema di convergenza. Allora, detto α il punto unito di h in $[a, b]$, l'elemento:

$$\gamma = \text{l'estremo di } [a, b] \text{ più vicino ad } \alpha$$

verifica l'ipotesi (3) del Teorema di convergenza.

Dimostrazione. Sia $d = |\, \gamma - \alpha \,|$ e I l'intorno chiuso di centro α e raggio d. Per come definito γ si ha $I \subset [a, b]$. Sia ora $x \in I$. Allora: $|\, h(x) - \alpha \,| = |\, h(x) - h(\alpha) \,|$ e, utilizzando il Teorema di Lagrange: esiste un numero reale θ compreso tra x e α, e quindi $\theta \in [a, b]$, tale che: $h(x) - h(\alpha) = h'(\theta)(x - \alpha)$, dunque $|\, h(x) - \alpha \,| = |\, h'(\theta) \,|\,|\, x - \alpha \,|$. Utilizzando l'ipotesi (2): $|\, h(x) - \alpha \,| \leqslant L \,|\, x - \alpha \,| < |\, x - \alpha \,| \leqslant d$, ovvero $h(x) \in I$. Ne segue che se $x_0 \in I \subset [a, b]$ allora per ogni numero intero positivo k si ha: $x_k = h(x_{k-1}) \in I \subset [a, b]$.

L'esempio che segue mostra l'uso del Teorema di convergenza e del Criterio di scelta del valore iniziale.

1.14 Esempio

Sia f la funzione definita, per ogni $x > 0$, da: $f(x) = x + \log x$. Poiché per ogni $x > 0$ si ha $f'(x) = 1 + 1/x > 0$, la funzione f ha *al più* uno zero. L'*esistenza* di uno zero si ottiene osservando che:

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Infine, essendo $f(1) = 1 > 0$, l'intervallo $(0, 1)$ *separa* lo zero di f.[5]

Sia α lo zero di f. Per approssimare α si considerano i metodi ad un punto definiti dalle funzioni (continue):

$$h_1(x) = -\log x \qquad , \qquad h_2(x) = e^{-x} \qquad , \qquad h_3(x) = \frac{x + e^{-x}}{2}$$

Si verifica facilmente (esercizio!) che i punti uniti di ciascuna di esse sono *tutti e soli* gli zeri di f. Dunque ciascuna ha *un solo* punto unito in $(0, 1)$.

Per ciascuno dei tre metodi ci si domanda se sia *utilizzabile*, ovvero se sia possibile *determinare un intervallo che, insieme alla funzione che definisce il metodo, soddisfa le ipotesi (1) e (2) del Teorema di convergenza.* Se il metod orisulta utilizzabile, *si utilizza il Criterio di scelta del punto iniziale* per determinare un valore a partire dal quale la successione generata dal metodo ad un punto risulta *convergente* ad α.

– *Metodo definito da h_1.*

  La funzione h_1 ha derivata prima continua. L'ipotesi (1) del Teorema di convergenza richiede un intervallo *chiuso* su cui h_1 è definita e che include il punto unito. L'intervallo $[0, 1]$ non è utilizzabile: la funzione h_1 non è definita in 0. Un intervallo che soddisfa le richieste è $[\frac{1}{2}, 1]$, ottenuto constatando che nel punto medio dell'intervallo $[0, 1]$ la funzione f assume valore *negativo* ed utilizzando il Teorema di esistenza degli zeri.

[5] Ovvero: è un intervallo di misura *finita* che include *un solo* zero di f.

Scelto l'intervallo, studiamo la *derivata prima* di h_1. Per ogni $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ si ha:

$$|\, h_1'(x)\,| = \frac{1}{x} \geqslant 1$$

dunque l'ipotesi (2) *non è verificata*. In questo caso *non esiste* un intervallo che verifica le ipotesi (1) e (2) perché essendo $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ si ha certamente:

$$|\, h_1'(\alpha)\,| > 1$$

Il metodo è *non utilizzabile.*

– *Metodo definito da h_2.*

  La funzione h_2 ha derivata prima continua. L'intervallo $[\frac{1}{2}, 1]$ verifica l'ipotesi (1). Inoltre per ogni $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ si ha:

  $$|\, h_2'(x)\,| = e^{-x} \leqslant L_2 = \frac{1}{\sqrt{e}} < 1$$

  dunque è verificata anche l'ipotesi (2): il metodo è *utilizzabile.* Poiché $f(\frac{3}{4}) > 0$, per il Criterio di scelta del punto iniziale la successione x_k generata a partire da $\gamma = \frac{1}{2}$ è convergente ad α.

  Essendo $h_2'(x) < 0$ per ogni $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, utilizzando il Teorema di Lagrange si può dedurre la seguente *proprietà qualitativa* della successione: per ogni k le differenze $x_k - \alpha$ e $x_{k+1} - \alpha$ sono non nulle ed *hanno segno opposto*, ovvero: x_k ed x_{k+1} sono "da parti opposte" rispetto ad α.

– *Metodo definito da h_3.*

  La funzione h_3 ha derivata prima continua e l'intervallo $[\frac{1}{2}, 1]$ verifica l'ipotesi (1). Inoltre per ogni $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ si ha:

  $$|\, h_3'(x)\,| = \frac{1 - e^{-x}}{2} \leqslant L_3 = \frac{1 - 1/e}{2} < 1$$

  dunque è verificata anche l'ipotesi (2): il metodo è *utilizzabile.* Come già stabilito studiando il metodo definito da h_2, per il Criterio di scelta del punto iniziale la successione x_k generata a partire da $\gamma = \frac{1}{2}$ è convergente ad α.

  Essendo $h_3'(x) > 0$ per ogni $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, utilizzando il Teorema di Lagrange si può dedurre che: (a) si ha sempre $x_k < \alpha$ e quindi, poiché la successione delle *distanze* $|\, x_k - \alpha\,|$ è, come sappiamo dalla dimostrazione del Teorema di convergenza, *decrescente*, si conclude che la successione x_k è *monotona crescente*; (b) per ogni $x_0 \in [\frac{1}{2}, 1]$ la successione generata dal metodo definito da h_3 a partire da x_0 è convergente ad α.

1.15 Osservazione (metodo utilizzabile per approssimare un punto unito)

Si è scelto di dichiarare un metodo *utilizzabile* (*per approssimare un punto unito* α) quando *è possibile determinare un intervallo che, insieme alla funzione che definisce il metodo, soddisfi le ipotesi (1) e (2) del Teorema di convergenza.*

Un metodo è certamente utilizzabile se è definito da una funzione h con derivata prima continua e nel punto unito in esame si ha $|\, h'(\alpha)\,| < 1$. In tal caso, infatti, la continuità di $h'(x)$ garantisce l'esistenza di un intervallo chiuso che contiene α e in tutti i punti x del quale di ha $|\, h'(x)\,| < 1$. Osservando che se l'ipotesi (2) del Torema di convergenza è soddisfatta allora si ha $|\, h'(\alpha)\,| < 1$, si conclude che:

un metodo è utilizzabile per approssimare il punto unito α se e solo se $|\, h'(\alpha)\,| < 1$

Una *condizione sufficiente* di *non* utilizzabilità di un metodo è che esso sia definito da una funzione h con derivata prima continua e che nel punto unito in esame si abbia $|\, h'(\alpha)\,| > 1$ (è la situazione incontrata analizzando il metodo definito da h_1). La *non utilizzabiltà* del metodo in questo caso è motivata dall'osservazione che si ha: *Se* x_k è una successione generata dal metodo ad un punto definito da h *allora*:

$$x_k \text{ è definitivamente uguale a } \alpha \qquad \text{oppure} \qquad x_k \text{ non converge ad } \alpha \qquad (*)$$

(*Dimostrazione.* Supponiamo che per ogni k sia $x_k \neq \alpha$. Dobbiamo dimostrare che, allora, x_k non converge ad α.

Si osservi, preliminarmente, che poiché h' è una funzione continua e $h'(\alpha) > 1$, esistono due numeri reali positivi ρ e δ tali che: $|\, h'(x)\,| > 1+\delta$ per ogni x nell'intorno $I_\rho(\alpha)$ di centro α e raggio ρ.

Adesso, procedendo *per assurdo*, supponiamo che $\lim x_k = \alpha$. Allora esiste un numero intero positivo n tale che $x_k \in I_\rho(\alpha)$ per ogni $k \geqslant n$. Sia poi m un numero intero tale che:

$$m > n \qquad \text{e} \qquad (1+\delta)^m > \frac{\rho}{|\, x_0 - \alpha\,|}$$

Utilizzando ripetutamente il Teorema di Lagrange si ottiene che esistono $\theta_{m-1}, \ldots, \theta_0 \in I_\rho(\alpha)$ tali che:

$$|\, x_m - \alpha\,| = |\, h'(\theta_{m-1})\,| \cdots |\, h'(\theta_0)\,|\,|\, x_0 - \alpha\,|$$

Ma per ogni $j = 0, \ldots, m-1$ si ha: $|\, h'(\theta_j)\,| > 1+\delta$ e quindi:

$$|\, x_m - \alpha\,| = |\, h'(\theta_{m-1})\,| \cdots |\, h'(\theta_0)\,|\,|\, x_0 - \alpha\,| > (1+\delta)^m\,|\, x_0 - \alpha\,| > \rho$$

ovvero $x_m \notin I_\rho(\alpha)$. Questo è assurdo perchè, essendo $m > n$, si ha $x_m \in I_\rho(\alpha)$.)

Dunque: anche se $|\, h'(\alpha)\,| > 1$, il metodo *può* generare successioni convergenti ad α (se ne ottiene una, ad esempio, scegliendo come valore iniziale α) ma *non è ragionevole* supporre di poter ottenere un valore iniziale *praticamente utilizzabile* per la costruzione di una successione convergente.

Anche la condizione $|\, h'(\alpha)\,| = 1$ è *sufficiente* per dichiarare il metodo *non* utilizzabile, ma in questo caso non necessariamente sussiste l'asserto $(*)$. Ritorneremo a discutere questa condizione dopo aver introdotto la nozione di *ordine di convergenza* di un metodo.

Esercizi

E11 Sia $h(x) = \frac{1}{2}\cos x$.

(1) Dimostrare che l'intervallo $[0, \pi/2]$ *separa* un punto unito, α, di h.

(2) Constatare che le ipotesi (1) e (2) del Teorema di convergenza sono verificate con $[a, b] = [0, \pi/2]$.

(3) Dimostrare che *se* $x \in [0, \pi/2]$ *allora* $h(x) \in [0, \pi/2]$.

(4) Determinare *tutti* i valori $\gamma \in [0, \pi/2]$ a partire dai quali la successione generata dal metodo definito da h risulta convergente ad α.

E12 Sia $h(0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $h(x) = 3 - \frac{1}{2}x$. Dimostrare che h ha derivata prima continua e che le ipotesi (1) e (2) del Teorema di convergenza sono verificate con $[a, b] = [1, 7]$. Discutere gli assegnamenti $z = \mathit{MetodoUnPunto}\,(h, 7)$ e $z = \mathit{MetodoUnPunto}\,(h, 1)$.

E13 Dimostrare la *versione lipschitziana* del Teorema di convergenza:

Siano $[a, b]$ un intervallo, $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e γ un elemento di $[a, b]$ tali che:

(1) esiste α punto unito di h in $[a, b]$;

(2) esiste $L \in [0, 1)$ tale che per ogni $x, y \in [a, b]$ si ha: $|\, h(x) - h(y)\,| \leqslant L\,|\, x - y\,|$;[6]

(3) la procedura $\mathit{MetodoUnPunto}\,(h, \gamma)$ genera una successione x_k in $[a, b]$.

Allora: (i) α è l'*unico* punto unito di h in $[a, b]$ e (ii) la successione x_k è *convergente* ad α.

E14 ★ Si consideri una funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ con derivata seconda su (a, b).

(1) Dimostrare che *se* $\alpha < \beta < \gamma$ sono tre zeri di f in $[a, b]$ *allora* esiste $c \in (a, b)$ tale che $f''(c) = 0$. (Suggerimento: applicare il Teorema di Rolle[7] prima alla funzione f poi ad f'.)

[6] Una funzione che verifica questa proprietà si chiama *contrazione* su $[a, b]$. La disuguaglianza significa, infatti, che h "contrae" la distanza tra x ed y.

[7] Se la funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è derivabile su (a, b) e $f(a) = f(b)$ allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$.

(2) Dedurne che: *se* per ogni $x \in (a, b)$ si ha $f''(x) \neq 0$ *allora* f ha *al più* due zeri in $[a, b]$.

In generale si ha: *se* la funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ha derivata k-esima su (a, b) e per ogni $x \in (a, b)$ si ha $f^{(k)}(x) \neq 0$ *allora* f ha *al più* k zeri in $[a, b]$.

E15 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che: per ogni x si ha $f^{(3)}(x) \neq 0$, per ogni $x < 0$ si ha $f'(x) \neq 0$, $f(-1) > 0$ e $f(0) < 0$. Cosa si può dedurre riguardo agli zeri di f?

E16 ★ Sia $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Applicare i risultati dell'Esercizio *E14* alla funzione f definita da $f(x) = x - h(x)$ e dedurne condizioni sufficienti affinché h abbia *al più* uno o, rispettivamente, *al più* due punti uniti in $[a, b]$.

Nell'Esempio 1.14 si sono trovati *due* metodi utilizzabili per approssimare lo zero α di f. Per decidere se uno dei due metodi sia da preferirsi rispetto all'altro studiamo la *rapidità di convergenza* ad α delle successioni generate.

1.16 Definizione (ordine di convergenza di un metodo ad un punto)
Siano $[a, b]$, h e γ che verificano le ipotesi del Teorema di convergenza e supponiamo che per la successione x_k, convergente ad α, si abbia $x_k \neq \alpha$ per ogni k.

– *Se* $h'(\alpha) \neq 0$ *allora*, eventualmente restringendo $[a, b]$, si ha:

$$0 < \lambda = \min_{[a,b]} |\, h'(x)\, | \leqslant \max_{[a,b]} |\, h'(x)\, | = L < 1$$

e quindi, per k maggiore o uguale ad un opportuno n:

$$\lambda^{k-n} |\, x_n - \alpha\, | \leqslant |\, x_k - \alpha\, | \leqslant L^{k-n} |\, x_n - \alpha\, |$$

ovvero: la successione $x_k - \alpha$ tende a zero *almeno* rapidamente come L^k ma *non più* rapidamente di λ^k. Restringendo $[a, b]$ e considerando k sufficientemente grande si conclude che:

$$x_k \text{ tende ad } \alpha \text{ come } |\, h'(\alpha)\, |^k$$

– *Se* $h'(\alpha) = 0$[8] *allora*: per ogni $\theta > 0$ si ha:[9]

$$\lim \frac{|\, x_k - \alpha\, |}{\theta^k} = 0$$

ovvero: la successione $x_k - \alpha$ tende a zero *più rapidamente* di *qualsiasi* successione di tipo esponenziale.

Si chiama *ordine di convergenza* del metodo ad un punto definito da h quando utilizzato per approssimare il punto unito α: *il più piccolo numero intero* q *tale che* $h^{(q)}(\alpha) \neq 0$.

Si ha dunque (si ricordi che si stanno considerando solo le successioni x_k tali che $x_k \neq \alpha$ per ogni k):

– Se $h'(\alpha) \neq 0$, l'ordine di convergenza è *uno* e *per tutte* le successioni convergenti x_k generate dal metodo la distanza $|\, x_k - \alpha\, |$ tende a zero come $|\, h'(\alpha)\, |^k$.

– Se $h'(\alpha) = 0$, l'ordine è *almeno due* e per *tutte* le successioni convergenti x_k generate dal metodo la distanza $|\, x_k - \alpha\, |$ tende a zero più rapidamente di qualsiasi successione di tipo esponenziale. Dunque: *qualunque successione convergente generata da un metodo di ordine due converge più rapidamente di qualunque successione convergente generata da un metodo di ordine uno.*

– In generale: *qualunque successione convergente generata da un metodo di ordine* p *converge più rapidamente di qualunque successione convergente generata da un metodo di ordine minore di* p.

---

[8] E la funzione h ha *derivata seconda* continua.

[9] La dimostrazione dell'asserto è riportata nell'Appendice 1 di fine capitolo.

1.17 Osservazione

Siano h una funzione con derivata prima continua, α un punto unito di h, e $|\,h'(\alpha)\,| = 1$. Sia infine x_k una successione generata dal metodo iterativo definito da h. *Se* $\lim x_k = \alpha$ e per ogni k si ha $x_k \neq \alpha$ *allora*:[10]

$$\textit{per ogni } \theta \in (0,1) \textit{ si ha:} \qquad \lim_{k\to+\infty} \frac{|\,x_k - \alpha\,|}{\theta^k} = +\infty$$

ovvero: la successione $x_k - \alpha$ tende a zero *più lentamente* di qualsiasi successione di tipo esponenziale.

1.18 Esempio (continuazione)

Per i due metodi utilizzabili individuati nell'Esempio 1.14 si ha:

$$|\,h_2'(\alpha)\,| = e^{-\alpha} \neq 0 \qquad \text{e} \qquad |\,h_3'(\alpha)\,| = \frac{1-e^{-\alpha}}{2} \neq 0$$

dunque entrambi hanno ordine di convergenza *uno*. Essendo poi:

$$|\,h_2'(\alpha)\,| = e^{-\alpha} > \frac{1-e^{-\alpha}}{2} = |\,h_3'(\alpha)\,|$$

si conclude che il metodo definito da h_3 genera una successione che tende ad α *più rapidamente* del metodo definito da h_2.

1.19 Osservazione (Studio grafico di un metodo ad un punto)

Si suppongano rappresentati, in uno stesso piano cartesiano, *i grafici* della funzione h e quello della funzione identità, entrambi su un intervallo (limitato) $[a,b]$.

– *Ricerca dei punti uniti di h in $[a,b]$.*

  I punti uniti di h in $[a,b]$ sono *le ascisse dei punti di intersezione* dei due grafici. Infatti, se $A \equiv (\bar{x},\bar{y})$[11] è uno dei punti di intersezione si ha: $\bar{y} = \bar{x}$ (perché A fa parte del grafico della funzione identità) e $\bar{y} = h(\bar{x})$ (perché A fa parte del grafico della funzione h) e quindi $\bar{x} = h(\bar{x})$.

– *Costruzione di un elemento della successione generata dal metodo.*

  Assegnato un elemento x in $[a,b]$ è possibile rappresentare $h(x)$ sull'asse delle ascisse con la costruzione seguente:

  (1) Si disegna la retta *verticale* passante per il punto $P \equiv (x,0)$ e si individua il punto $Q \equiv (x,h(x))$ intersezione della retta con il grafico di h.

  (2) Si disegna la retta *orizzontale* passante per il punto Q e si individua il punto $R \equiv (h(x),h(x))$ intersezione della retta con il grafico della funzione identità.

  (3) Si disegna la retta *verticale* passante per il punto R e si individua il punto $S \equiv (h(x),0)$ intersezione della retta con l'asse delle ascisse.

– *Studio dell'utilizzabilità del metodo.*

  Sia $A \equiv (\alpha,0)$ un punto di intersezione dei due grafici. Per studiare l'utilizzabilità del metodo per approssimare α:

  (i) Si considerano la retta t tangente al grafico di h in A, la retta b grafico della funzione identità (già presente nel disegno) e la retta p grafico della funzione $x \mapsto \alpha - x$, e

  (ii) Si *ruota* la retta b intorno al punto A in senso *orario*.

  Si ha: $|\,h'(\alpha)\,| < 1$ *se e solo se* $t \neq b, t \neq p$ e nella rotazione b si sovrappone *prima* a t e *poi* a p.

[10] La dimostrazione dell'asserto è riportata nell'Appendice 2 di fine capitolo.

[11] Il simbolo $\equiv$ si legge: "di coordinate."

E17 ★ Si consideri la funzione h_3 definita nell'Esempio 1.14. Per ogni $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ si ha $h_3'(x) > 0$. Dimostrare che:

(1) *se* $x \in [\frac{1}{2}, \alpha)$ *allora* $h_3(x) \in (x, \alpha)$.

(2) *se* $x \in (\alpha, 1]$ *allora* $h_3(x) \in (\alpha, x)$.

Dedurne che *se* $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ *allora* $h(x) \in [\frac{1}{2}, 1]$ e quindi che *per ogni* $\gamma \in [\frac{1}{2}, 1]$ la successione generata dal metodo definito da h_3 *converge* ad α.

E18 ★ Siano $[a, b]$, h e γ che verificano le ipotesi del Teorema di convergenza. Inoltre, per ogni $x \in [a, b]$ sia:

$$\lambda \leqslant |\, h'(x) \,| \leqslant L$$

Dimostrare che, allora:

$$\lambda^k |\, x_0 - \alpha \,| \leqslant |\, x_k - \alpha \,| \leqslant L^k |\, x_0 - \alpha \,|$$

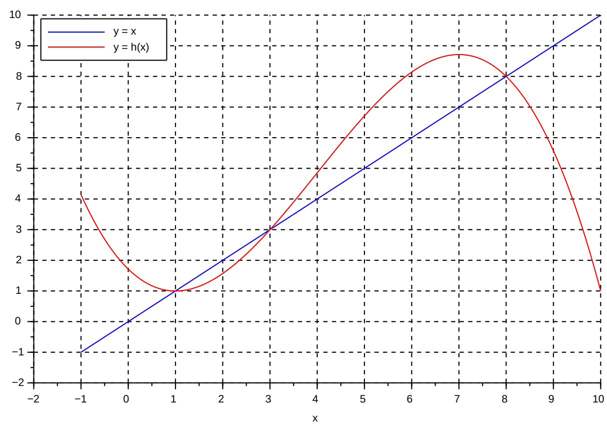
E19 Sia f la funzione definita, per ogni $x \in \mathbb{R}$ da $f(x) = x - e^{x-2}$.

(1) Dimostrare che f ha *due* zeri e *separarli*.

(2) Dimostrare che i punti uniti della funzione h definita da $h(x) = e^{x-2}$ sono *tutti e soli* gli zeri di f.

(3) Dimostrare, prima *graficamente* poi *analiticamente*, che il metodo ad un punto definito da h è *utilizzabile* per approssimare uno degli zeri (ed il metodo risulta di *ordine uno* quando utilizzato per approssimare tale zero) e *non utilizzabile* per l'altro.

E20 Nella figura seguente, generata da *Scilab*, sono rappresentati, sull'intervallo $I = [-1, 10]$, il grafico della funzione $h : I \to \mathbb{R}$ (in rosso) e quello della funzione identità (in blu).



Individuare i punti uniti di h e, per ciascuno di essi: decidere se il metodo iterativo definito da h sia utilizzabile per l'approssimazione ed eventualmente indicare l'ordine di convergenza.

1.3 Metodo di Newton

Tra tutti i metodi ad un punto, il *metodo di Newton* è di uso particolarmente frequente.

1.20 Definizione (metodo di Newton)
Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ con derivata *prima* continua e per ogni $x \in [a,b]$ sia $f'(x) \neq 0$. Il *metodo di Newton* (*applicato ad* f) è il metodo ad un punto definito dalla funzione:

$$h(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Siano dunque $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione con derivata *prima* continua tale che $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in [a,b]$ e h la funzione che definisce il metodo di Newton.

1.21 Osservazione (utilizzabilità e ordine di convergenza del Metodo di Newton)
Per quanto mostrato nell'Esempio 1.11, *i punti uniti di* h *sono* tutti e soli *gli zeri di* f.
Inoltre: Se f ha derivata *seconda* continua si ha:

$$h'(x) = \frac{f^{(2)}(x)f(x)}{\big(f'(x)\big)^2}$$

e quindi, detto α uno zero di f:

$$h'(\alpha) = 0$$

Si deduce che:

- Per quanto detto nell'Osservazione 1.15, la condizione $|\, h'(\alpha) \,| = 0 < 1$ è *sufficiente* per poter affermare che *il metodo di Newton è utilizzabile per approssimare* α.
- Il metodo ha *ordine di convergenza almeno due* quando utilizzato per approssimare α.

1.22 Osservazione (Interpretazione geometrica del Metodo di Newton: metodo delle tangenti)
Si rappresenti su un piano cartesiano il grafico della funzione f su $[a,b]$. Assegnato $z \in [a,b]$ il valore $h(z)$ si determina con la seguente costruzione grafica:

- Si disegna la retta t tangente al grafico di f nel punto $P \equiv (z, f(z))$;
- Si determina i punto $Q \equiv (\bar{z}, 0)$ intersezione di t con l'asse delle ascisse (l'intersezione è un punto perché, essendo $f'(z) \neq 0$, la retta t non è orizzontale): si ha $\bar{z} = h(z)$.

Infatti: L'equazione della retta tangente t è:

$$y = f'(z)(x - z) + f(z)$$

da cui si ricava l'ascissa di Q:

$$0 = f'(z)(x - z) + f(z) \quad \Rightarrow \quad \bar{z} = z - \frac{f(z)}{f'(z)} = h(z)$$

1.23 Osservazione (Criterio di scelta del valore iniziale per il metodo di Newton)
Siano f con derivata *seconda* continua ed I un intervallo contenente α zero di f e tale che:

$$\text{per ogni } x \in I \text{ si ha } f'(x) \neq 0 \text{ e } f^{(2)}(x) \neq 0$$

Sia infine γ un elemento di I, certamente esistente (perché ?), tale che:

$$f(\gamma)f^{(2)}(\gamma) > 0$$

Allora: la successione generata dal metodo di Newton a partire da γ *è convergente* ad α e *monotona*.

Dimostrazione: Per via grafica, in un caso particolare, si dimostra che la successione è monotona e limitata, dunque *convergente*. Il limite della successione è uno zero di f, ovvero un punto unito della funzione h, perché la successione è generata da un metodo ad un punto definito da una funzione h *continua*.

1.24 Esempio

Sia $f(x) = x + \log x$, definita per ogni $x > 0$. Sappiamo già che f ha un solo zero, α, separato dall'intervallo $[\frac{1}{2}, 1]$. La funzione f ha derivata prima *sempre positiva* e derivata seconda continua, dunque *il metodo di Newton è utilizzabile* per approssimare α. Inoltre, la derivata seconda è *sempre negativa*, dunque il criterio di scelta del valore iniziale per il metodo di Newton è utilizzabile e stabilisce che *per ogni* $\gamma \in [\frac{1}{2}, \alpha)$ la successione generata dal metodo di Newton converge allo zero ed è monotona crescente. Si osservi che, non essendo noto il valore di α, l'unico punto accessibile di quest'ultimo intervallo è $\frac{1}{2}$.

1.4 Criteri d'arresto per metodi ad un punto

I criteri d'arresto studiati per il metodo di bisezione si basano sulla costruzione di una successione di intervalli che racchiudono uno zero di f. I metodi ad un punto, in particolare nel metodo di Newton, *non* costruiscono successioni di intervalli. Occorrono quindi criteri d'arresto diversi.

1.25 Definizione (criterio d'arresto di tipo assoluto, 1)

Siano h, $[a, b]$ e γ che verificano le ipotesi del Teorema di convergenza e x_k la successione generata dal metodo ad un punto definito da h a partire da γ, convergente al punto unito α.

Si consideri il seguente criterio d'arresto: dato un numero reale positivo δ,

$$\textit{se } |\, h(x_k) - x_k \,| < \delta \textit{ allora } \text{arresta la costruzione}$$

- Il criterio è *calcolabile*.
- Il criterio è *efficace*. Infatti:

  $$|\, h(x_k) - x_k \,| = |\, h(x_k) - h(x_{k-1}) \,| \leqslant L \,|\, h(x_{k-1}) - x_{k-1} \,|$$

  e quindi:

  (a) iterando all'indietro si ottiene:

  $$|\, h(x_k) - x_k \,| \leqslant L^k \,|\, h(x_0) - x_0 \,|$$

  ovvero la successione $|\, h(x_k) - x_k \,|$ tende a zero (*almeno* come L^k) dunque per ogni $\delta > 0$ la disuguaglianza è *certamente soddisfatta dopo un numero finito di iterazioni*;

  (b) poiché $L < 1$ si ha:

  $$|\, h(x_k) - x_k \,| < |\, h(x_{k-1}) - x_{k-1} \,|$$

  ovvero la successione $|\, h(x_k) - x_k \,|$ è *decrescente*.
- Si ha:

  $$h(x_k) - x_k = h(x_k) - h(\alpha) + \alpha - x_k$$

  Per il Teorema di Lagrange esiste θ_k tra x_k ed α tale che:

  $$h(x_k) - h(\alpha) = h'(\theta_k)(x_k - \alpha)$$

  da cui:

  $$h(x_k) - x_k = \big(h'(\theta_k) - 1\big)(x_k - \alpha)$$

  Poiché $\theta_k \in [a, b]$ allora $h'(\theta_k) < 1$ e $h'(\theta_k) - 1 < 0$. Dunque:

  $$x_k - \alpha = \frac{h(x_k) - x_k}{h'(\theta_k) - 1}$$

  e:

  $$|\, x_k - \alpha \,| = \frac{|\, h(x_k) - x_k \,|}{1 - h'(\theta_k)}$$

Il criterio usa $|\, h(x_k) - x_k \,|$ per *stimare* l'errore assoluto $|\, x_k - \alpha \,|$ (ed è quindi un criterio *di tipo assoluto*) e quando la condizione del criterio d'arresto è verificata si ha:

$$|\, x_k - \alpha \,| < \frac{\delta}{1 - h'(\theta_k)}$$

Poiché $\theta_k \to \alpha$, per k grande si ha $h'(\theta_k) \approx h'(\alpha)$. Quindi:

(a) La stima dell'errore assoluto è tanto *migliore* quanto $h'(\alpha)$ è *piccolo.* In particolare la stima è buona quando $h'(\alpha) = 0$, ad esempio per il *metodo di Newton* nel qual caso si ha anche:

$$|\, h(x_k) - x_k \,| = \left| \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \right|$$

(b) La stima è tanto *peggiore* quanto $h'(\alpha)$ è *vicino a uno.* Se $h'(x_k) \approx 1$ si ha:

$$|\, x_k - \alpha \,| = \frac{|\, h(x_k) - x_k \,|}{1 - h'(\theta_k)} \gg |\, h(x_k) - x_k \,|$$

e il criterio d'arresto rischia di interrompere la costruzione quando $|\, x_k - \alpha \,| \gg \delta$, ovvero quando l'approssimazione *non è* sufficientemente accurata.

1.26 Definizione (criterio d'arresto di tipo assoluto, 2)

Sia f la funzione della quale si vuole approssimare uno zero, α, e sia $[a, b]$ un intervallo contenente α e sul quale la funzione derivata prima di f è *continua* ed assume sempre valore *diverso da zero.* Sia infine x_k la successione *convergente* ad α generata dal metodo ad un punto scelto per l'approssimazione. Supponiamo che per ogni k sia $x_k \in [a, b]$.[12]

Si consideri il seguente criterio d'arresto: dato un numero reale positivo δ,

se $|\, f(x_k) \,| < \delta$ *allora* arresta la costruzione

- Il criterio è *calcolabile* (supponendo che la procedura sappia calcolare f).
- Il criterio è *efficace.* Infatti, per la continuità di f si ha:

  $$x_k \to \alpha \qquad \Rightarrow \qquad f(x_k) \to f(\alpha) = 0$$

  Dunque, per ogni $\delta > 0$ la disuguaglianza è *certamente soddisfatta dopo un numero finito di iterazioni.*
- Essendo α zero di f si ha:

  $$f(x_k) = f(x_k) - f(\alpha)$$

  Per il Teorema di Lagrange esiste θ_k tra x_k ed α tale che:

  $$f(x_k) - f(\alpha) = f'(\theta_k)(x_k - \alpha)$$

  da cui:

  $$f(x_k) = f'(\theta_k)\,(x_k - \alpha)$$

  Poiché $\theta_k \in [a, b]$ allora $f'(\theta_k) \neq 0$, dunque:

  $$|\, x_k - \alpha \,| = \left| \frac{f(x_k)}{f'(\theta_k)} \right|$$

  Il criterio usa $|\, f(x_k) \,|$ per *stimare* l'errore assoluto $|\, x_k - \alpha \,|$ (ed è quindi un criterio *di tipo assoluto*) e quando la condizione del criterio d'arresto è verificata si ha:

  $$|\, x_k - \alpha \,| < \frac{\delta}{|\, f'(\theta_k) \,|}$$

  Poiché $\theta_k \to \alpha$, per k grande si ha $f'(\theta_k) \approx f'(\alpha)$. Allora:

[12] Per la convergenza della successione ci si può sempre ricondurre a tale situazione eliminando un opportuno numero di termini iniziali e rinominando i restanti.

(a) La stima dell'errore assoluto è tanto *migliore* quanto più $|f'(\alpha)|$ è *vicino a uno*. In tal caso il criterio d'arresto interrompe la costruzione *appena* l'approssimazione è sufficientemente accurata.

(b) La stima è tanto *peggiore* quanto più $|f'(\alpha)|$ è *grande* oppure quanto più $|f'(\alpha)|$ è *vicino a zero*.

Nel primo caso si ha:

$$|x_k - \alpha| = \left| \frac{f(x_k)}{f'(\theta_k)} \right| \ll |f(x_k)|$$

e il criterio d'arresto rischia di interrompere la costruzione quando $|x_k - \alpha| \ll \delta$, ovvero la procedura si accorge *in ritardo* che l'approssimazione è sufficientemente accurata.

Nel secondo caso si ha:

$$|x_k - \alpha| = \left| \frac{f(x_k)}{f'(\theta_k)} \right| \gg |f(x_k)|$$

e il criterio d'arresto rischia di interrompere la costruzione quando $|x_k - \alpha| \gg \delta$, ovvero quando l'approssimazione *non è* sufficientemente accurata.

1.5 Uso del tipo *numero in virgola mobile e precisione finita* nei metodi ad un punto

Discutiamo adesso l'esecuzione sul calcolatore delle procedure che realizzano metodi ad un punto.

Siano h, $[a, b]$ e γ che verificano le ipotesi del Teorema di convergenza, ed α il punto unito di h in $[a, b]$. La successione di numeri reali x_k generata dal metodo ad un punto definito da h a partire da $x_0 = \gamma$ è convergente ad α e $x_k \in [a, b]$ per ogni k. Siano poi M l'insieme di numeri in virgola mobile e precisione finita scelto e ϕ l'algoritmo utilizzato per approssimare i valori di h.

1.27 Teorema (uso del tipo *numero in virgola mobile e precisione finita*, 1)
Se:

(i) esiste un numero reale $\omega \geqslant 0$ tale che per ogni $\xi \in [a, b] \cap M$ si ha:

$$|\phi(\xi) - h(\xi)| \leqslant \omega$$

(ii) $\gamma \in M$ e la successione ξ_k di elementi di M definita da $\xi_0 = \gamma$, $\xi_{k+1} = \phi(\xi_k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ è contenuta nell'intervallo $[a, b]$

allora:

(A) per ogni $\xi \in [a, b] \cap M$:

$$|\xi - \alpha| > \frac{\omega}{1 - L} \qquad \Rightarrow \qquad |\phi(\xi) - \alpha| < |\xi - \alpha|$$

(B) per ogni k si ha:

$$|\xi_k - x_k| \leqslant \frac{1 - L^k}{1 - L}\,\omega$$

(C) per ogni k si ha:

$$|\xi_k - \alpha| \leqslant \frac{1 - L^k}{1 - L}\,\omega + L^k |\xi_0 - \alpha| = \frac{\omega}{1 - L} + L^k \left(|\xi_0 - \alpha| - \frac{\omega}{1 - L} \right)$$

Infatti, per ogni $\xi \in [a, b] \cap M$ si ha:

$$|\phi(\xi) - \alpha| \leqslant |\phi(\xi) - h(\xi)| + |h(\xi) - h(\alpha)| \leqslant \omega + |h(\xi) - h(\alpha)|$$

Per il Teorema di Lagrange esiste un numero reale θ tra ξ ed α tale che:

$$|h(\xi) - h(\alpha)| = |h'(\theta)|\,|\xi - \alpha|$$

e quindi, essendo $\theta \in [a, b]$:

$$| h(\xi) - h(\alpha) | \leqslant L | \xi - \alpha |$$

Dunque:

$$| \phi(\xi) - \alpha | \leqslant \omega + L | \xi - \alpha |$$

Siccome:

$$| \xi - \alpha | > \frac{\omega}{1 - L} \qquad \Rightarrow \qquad \omega < (1 - L) | \xi - \alpha |$$

si ottiene l'asserto (A).

Si ha poi:

$$| \xi_k - x_k | = | \phi(\xi_{k-1}) - h(x_{k-1}) | \leqslant | \phi(\xi_{k-1}) - h(\xi_{k-1}) | + | h(\xi_{k-1}) - h(x_{k-1}) |$$

da cui, utilizzando le ipotesi (i) e (ii) ed il Teorema di Lagrange:

$$| \xi_k - x_k | \leqslant \omega + L | \xi_{k-1} - x_{k-1} |$$

Iterando, e ricordando che $x_0 = \xi_0$ si ottiene:

$$| \xi_k - x_k | \leqslant \left(1 + L + \cdots + L^{k-1}\right) \omega = \frac{1 - L^k}{1 - L} \, \omega$$

ovvero l'asserto (B).

L'asserto (C) si ottiene immediatamente dall'asserto (B):

$$| \xi_k - \alpha | \leqslant | \xi_k - x_k | + | x_k - \alpha | \leqslant \frac{1 - L^k}{1 - L} \, \omega + L^k | \xi_0 - \alpha |$$

1.28 Osservazione

Si osservi che:

- L'asserto (A) garantisce che *la successione delle distanze* $| \xi_k - \alpha |$ *è decrescente finché* ξ_k *non entra nell'intorno chiuso di centro* α *e raggio* $\omega/(1 - L)$*, dopodiché nulla si può dire.* In particolare: *non è garantita la convergenza della successione* ξ_k.
- L'asserto (B) afferma che *le successioni* ξ_k *ed* x_k *non sono mai troppo lontane.*
- L'asserto (C) traduce in termini di distanza di ξ_k da α quanto mostrato dall'asserto (A).

Per quanto riguarda l'uso dei criteri d'arresto, la principale differenza con il caso in cui la procedura usa il tipo *numero reale*, come già visto per il metodo di bisezione, è che *il criterio può risultare non efficace se l'utilizzatore richiede un'approssimazione troppo accurata.* Si ha infatti:

1.29 Teorema (uso del tipo *numero in virgola mobile e precisione finita*, continuazione)

Sia δ un numero reale positivo e siano valide le ipotesi (i) e (ii) della parte 1. *Allora*:

(D) Sia:

se $| \phi(\xi_k) \ominus \xi_k | < \mathrm{rd}(\delta)$ *allora* arresta la costruzione

la realizzazione del *primo criterio*. Si ha:

- Il criterio è *calcolabile*.
- Per decidere l'efficacia si studia la successione $| \phi(\xi_k) - \xi_k |$. Si ha:

$$| \phi(\xi_k) - \xi_k | \leqslant | \phi(\xi_k) - h(\xi_k) | + | h(\xi_k) - h(\xi_{k-1}) | + | h(\xi_{k-1}) - \phi(\xi_{k-1}) |$$

Utilizzando le ipotesi (i) e (ii) ed il Teorema di Lagrange si ottiene:

$$| \phi(\xi_k) - \xi_k | \leqslant \omega + L | \phi(\xi_{k-1}) - \xi_{k-1} | + \omega = L | \phi(\xi_{k-1}) - \xi_{k-1} | + 2 \omega$$

Allora:

(a) iterando all'indietro:

$$|\,\phi(\xi_k) - \xi_k\,| \leqslant L^k\,|\,\phi(\xi_0) - \xi_0\,| + 2\,\frac{1-L^k}{1-L}\,\omega = \frac{2\omega}{1-L} + L^k\Big(\,|\,\phi(\xi_0) - \xi_0\,| - \frac{2\omega}{1-L}\Big)$$

(b) se $|\,\phi(\xi_{k-1}) - \xi_{k-1}\,| > \dfrac{2\omega}{1-L}$ allora $|\,\phi(\xi_k) - \xi_k\,| < |\,\phi(\xi_{k-1}) - \xi_{k-1}\,|$.

Se ne deduce che *la successione* $|\,\phi(\xi_k) - \xi_k\,|$ *è decrescente finché:*

$$|\,\phi(\xi_k) - \xi_k\,| > \frac{2\,\omega}{1-L}$$

dopodiché nulla si può dire. Dunque *il criterio può risultare non efficace.* In base alla disuguaglianza ottenuta, una *condizione sufficiente* per l'efficacia del criterio è:

$$\delta > \frac{2\,\omega}{1-L}$$

– Per discutere l'uso di $|\,\phi(\xi_k) \ominus \xi_k\,|$ come stima dell'errore assoluto commesso utilizzando ξ_k per approssimare α si cerca una relazione tra $|\,\phi(\xi_k) - \xi_k\,|$ e $|\,\xi_k - \alpha\,|$. Si ha:

$$\phi(\xi_k) - \xi_k = \big(\phi(\xi_k) - h(\xi_k)\big) + \big(h(\xi_k) - h(\alpha)\big) + (\alpha - \xi_k)$$

Per il Teorema di Lagrange esiste θ_k tra ξ_k e α tale che:

$$\phi(\xi_k) - \xi_k = \big(\phi(\xi_k) - h(\xi_k)\big) + h'(\theta_k)(\xi_k - \alpha) + (\alpha - \xi_k)$$

ovvero:

$$\phi(\xi_k) - \xi_k = \big(\phi(\xi_k) - h(\xi_k)\big) + \big(h'(\theta_k) - 1\big)(\xi_k - \alpha)$$

Dall'ipotesi (ii) si deduce che $\theta_k \in [a,b]$ e quindi $h'(\theta_k) - 1 < 0$. Allora:

$$\xi_k - \alpha = \frac{(\xi_k - \phi(\xi_k)) + \big(\phi(\xi_k) - h(\xi_k)\big)}{1 - h'(\theta_k)}$$

Quando $|\,\phi(\xi_k) - \xi_k\,| > \delta$, tenuto conto della limitazione su δ necessaria per l'efficacia si ha:

$$|\,\phi(\xi_k) - \xi_k\,| > \frac{2\omega}{1-L} > 2\omega$$

Allora, poiché per le ipotesi (i) e (ii) si ha $|\,\phi(\xi_k) - h(\xi_k)\,| \leqslant \omega$, si approssima:

$$|\,\xi_k - \alpha\,| = \frac{|\,\xi_k - \phi(\xi_k) + \big(\phi(\xi_k) - h(\xi_k)\big)\,|}{1 - h'(\theta_k)} \approx \frac{|\,\phi(\xi_k) - \xi_k\,|}{1 - h'(\theta_k)}$$

risultato analogo a quello ottenuto utilizzando il tipo *numero reale*, e quindi soggetto alle stesse critiche.

(E) Detto ψ l'algoritmo scelto per approssimare i valori di f, sia:

se $|\,\psi(\xi_k)\,| < \mathrm{rd}(\delta)$ *allora* arresta la costruzione

la realizzazione del *secondo criterio. Se* sussiste l'ipotesi seguente, analoga alla (i):

(iii) esiste un numero reale $\eta \geqslant 0$ tale che per ogni $\xi \in [a,b] \cap M$ si ha:

$$|\,\psi(\xi) - f(\xi)\,| \leqslant \eta$$

allora:

– Il criterio è *calcolabile.*

– Per decidere l'efficacia si studia la successione $|\,\psi(\xi_k)\,|$. Si riscrive:

$$\psi(\xi_k) = \big(\psi(\xi_k) - f(\xi_k)\big) + \big(f(\xi_k) - f(\alpha)\big)$$

Per il Teorema di Lagrange esiste θ_k tra ξ_k e α tale che:

$$\psi(\xi_k) = \big(\psi(\xi_k) - f(\xi_k)\big) + f'(\theta_k)(\xi_k - \alpha) \qquad (*)$$

Utilizzando l'ipotesi (iii) e quanto osservato riguardo all'asserto (A), detto m il massimo valore di $|\,f'(x)\,|$ nell'intorno chiuso di centro α e raggio $\omega/(1-L)$, per k sufficientemente grande si ottiene:

$$|\,\psi(\xi_k)\,| \leqslant \eta + m\,\frac{\omega}{1-L}$$

e *nulla si può dire sulla convergenza a zero della successione.* Dunque *il criterio può risultare non efficace.* In particolare, supponendo $m \approx |\,f'(\alpha)\,|$, *non è ragionevole aspettarsi di ottenere:*

$$|\,\psi(\xi_k)\,| < \eta + |\,f'(\alpha)\,|\,\frac{\omega}{1-L}$$

È perciò opportuno che l'utilizzatore scelga:

$$\delta > \eta + |\,f'(\alpha)\,|\,\frac{\omega}{1-L}$$

– Per discutere l'uso di $|\,\psi(\xi_k)\,|$ come stima dell'errore assoluto commesso utilizzando ξ_k per approssimare α si cerca una relazione tra $|\,\psi(\xi_k)\,|$ e $|\,\xi_k - \alpha\,|$. Ricordando che per ipotesi $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in [a,b]$, dalla relazione $(*)$ si ha:

$$\xi_k - \alpha = \frac{\psi(\xi_k) - \big(\psi(\xi_k) - f(\xi_k)\big)}{f'(\theta_k)}$$

Quando $|\,\psi(\xi_k)\,| > \delta$, tenuto conto della limitazione su δ suggerita per l'efficacia si ha:

$$|\,\psi(\xi_k)\,| > \delta > \eta + |\,f'(\alpha)\,|\,\frac{\omega}{1-L} > \eta$$

Allora, ricordando l'ipotesi (iii), si approssima:

$$|\,\xi_k - \alpha\,| = \left|\frac{\psi(\xi_k) - \big(\psi(\xi_k) - f(\xi_k)\big)}{f'(\theta_k)}\right| \approx \left|\frac{\psi(\xi_k)}{f'(\theta_k)}\right|$$

risultato analogo a quello ottenuto utilizzando il tipo *numero reale*, e quindi soggetto alle stesse critiche.

1.6 Condizionamento del calcolo di uno zero di una funzione

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua ed α uno zero isolato di f. Siano poi $[a,b]$ un intervallo che separa α e $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua *vicina* ad f, ovvero tale che:

per ogni $x \in [a,b]$ si ha: $|\,g(x) - f(x)\,| \leqslant \delta$, con $\delta > 0$ "piccolo"

Lo studio del *condizionamento* del calcolo di α consiste nel determinare quanto lontano da α può essere uno zero di g rispetto a δ.

In termini grafici, la relazione tra f e g si rilegge:

per ogni $x \in [a,b]$ si ha: $f(x) - \delta \leqslant g(x) \leqslant f(x) + \delta$

dunque *il grafico di g giace nella parte di piano compresa tra il grafico di $f(x) - \delta$ ed il grafico di $f(x) + \delta$.*

Consideriamo alcuni casi in cui f è *regolare.*

– Siano $f'(\alpha) \neq 0$, $[a,b]$ un intorno di α in cui sia ragionevole l'approssimazione:

$$f(x) \approx f'(\alpha)(x-\alpha)$$

e δ tale che $|\,f(a)\,|, |\,f(b)\,| > \delta$. In queste ipotesi g ha certamente qualche zero in $[a,b]$. Si consideri, ad esempio, la situazione rappresentata a sinistra in Figura 1, in cui è riportato a tratteggio nero il grafico di $f(x)$, in rosso quello di $f(x)+\delta$ e in blu quello di $f(x)-\delta$. Come graficamente evidente, il più piccolo intervallo che certamente contiene gli zeri di g è quello di estremi le intersezioni con l'asse delle ascisse delle curve rossa e blu. Dunque:

nel peggiore dei casi g ha uno zero che dista da α circa: $k\,\delta$ con $k = 1/|\,f'(\alpha)\,|$

Lo scostamento è propozionale a δ ed il condizionamento è *tanto peggiore* quanto più $f'(\alpha)$ è *vicino a zero*:

$$\lim_{\delta\to 0}\left|\frac{\text{scostamento}}{\delta}\right| = \frac{1}{|\,f'(\alpha)\,|}$$

– Siano $f'(\alpha) = 0$, $f''(\alpha) \neq 0$ e $[a,b]$ un intorno di α in cui sia ragionevole l'approssimazione:

$$f(x) \approx \tfrac{1}{2}\,f''(\alpha)(x-\alpha)^2$$

In questo caso, schematizzato al centro in Figura 1 il condizionamento è *pessimo*: per quanto piccolo sia δ, il grafico di g potrebbe essere compreso tra le curve nera e rossa e g non avere zeri in $[a,b]$. Una piccola perturbazione di f può far "scomparire" l'oggetto da approssimare.

– Siano $f'(\alpha) = f''(\alpha) = 0, f^{(3)}(\alpha) \neq 0$, $[a,b]$ un intorno di α in cui sia ragionevole l'approssimazione:

$$f(x) \approx \tfrac{1}{6}\,f^{(3)}(\alpha)(x-\alpha)^3$$

e δ tale che $|\,f(a)\,|, |\,f(b)\,| > \delta$. Anche in questo caso, schematizzato a destra in Figura 1, g ha certamente qualche zero in $[a,b]$. Il più piccolo intervallo che certamente contiene gli zeri di g è quello di estremi le intersezioni con l'asse delle ascisse delle curve rossa e blu. Dunque:

nel peggiore dei casi g ha uno zero che dista da α circa: $k\,\sqrt[3]{\delta}$ con $k = \sqrt[3]{6/|\,f^{(3)}(\alpha)\,|}$

Lo scostamento è proporzionale alla *radice cubica* di δ e il calcolo di α è *mal condizionato*:

$$\lim_{\delta\to 0}\left|\frac{\text{scostamento}}{\delta}\right| = +\infty$$

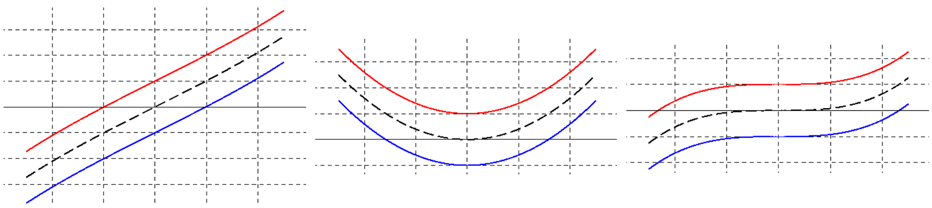


Figura 1: Grafici di f (nero), $f+\delta$ (rosso) e $f-\delta$ (blu).

Da questi esempi si deduce che *l'unico caso in cui il calcolo di α è ben condizionato è quello in cui $f'(\alpha)$ è non troppo piccolo.*

1.30 Osservazione (condizionamento per funzioni dipendenti da un parametro)
Sia $f(x;t)$ una funzione *regolare* della variabile x e del parametro reale t. Sia poi $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che: $f(\alpha;0) = 0$. Se per la derivata parziale di f rispetto ad x si ha:

$$\partial_x f(\alpha;0) \neq 0$$

allora (Teorema delle funzioni implicite[13]) esiste una funzione regolare $z(t)$, definita in un intorno I di 0, tale che:

$$\text{(a)}\quad z(0) = \alpha \qquad \text{e} \qquad \text{(b)}\quad \text{per ogni } t \in I \text{ si ha} \quad f\big(z(t);t\big) = 0$$

[13]Si veda ad esempio: `https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_delle_funzioni_implicite`.

La funzione z descrive quindi *come varia* lo zero in funzione di t.

La regolarità di z consente di ottenere *un'approssimazione dello scostamento dello zero da α per t piccolo*:

$$z(t) \approx z(0) + z'(0)\,t \quad \text{ovvero} \quad z(t) - \alpha \approx z'(0)\,t$$

Per l'uguaglianza (b) e per la regolarità di f e z si ottiene:

$$\frac{d}{dt} f\big(z(t);t\big)\bigg|_{t=0} = \partial_x f\big(z(0);0\big)\, z'(0) + \partial_t f\big(z(0);0\big) = 0$$

e quindi:

$$z'(0) = -\frac{\partial_t\big(z(0);0\big)}{\partial_x\big(z(0);0\big)}$$

dunque:

$$z(t) - \alpha \approx -\frac{\partial_t\big(z(0);0\big)}{\partial_x\big(z(0);0\big)}\, t$$

1.31 Esempio

Sia:

$$f(x;t) = (x - \tfrac{1}{10})(x-10) + t$$

Posto $\alpha_1 = \frac{1}{10}$ e $\alpha_2 = 10$ si ha:

$$f(\alpha_1;0) = 0 \quad \text{e} \quad f(\alpha_2;0) = 0$$

Inoltre:

$$\partial_x f(x;t) = 2x - (10 + \tfrac{1}{10})$$

e quindi:

$$\partial_x(\alpha_1;0) = -\tfrac{99}{10} \neq 0 \quad \text{e} \quad \partial_x(\alpha_2;0) = \tfrac{99}{10} \neq 0$$

Allora:

$$\frac{\partial_t\big(\alpha_1;0\big)}{\partial_x\big(\alpha_1;0\big)} = \frac{10}{99} \quad \text{e} \quad \frac{\partial_t\big(\alpha_2;0\big)}{\partial_x\big(\alpha_2;0\big)} = -\frac{10}{99}$$

Misurando lo scostamento degli zeri con l'errore *assoluto* si ha:

$$z(t) - \alpha_1 \approx \tfrac{10}{99}\,t \quad \text{e} \quad z(t) - \alpha_2 \approx -\tfrac{10}{99}\,t$$

e gli zeri subiscono uno scostamento, in valore assoluto, circa uguale.

Se si sceglie di misurare lo scostamento degli zeri con l'errore *relativo* si ha:

$$\frac{z(t) - \alpha_1}{\alpha_1} \approx \tfrac{100}{99}\,t \quad \text{e} \quad \tfrac{z(t)-\alpha_2}{\alpha_2} \approx -\tfrac{1}{99}\,t$$

In questo caso lo zero α_1 subisce uno scostamento, in valore assoluto, cento volte maggiore di quello subito dallo zero α_2.

Esercizi

E21 ♠ Sia f la funzione definita da $f(x) = x + x^3$.

(1) Dimostrare che il metodo di Newton *è utilizzabile* per approssimare lo zero di f.

(2) Dimostrare che *non è possibile* utilizzare il criterio di scelta del valore iniziale per il metodo di Newton.

(3) Calcolare la funzione h che definisce il metodo di Newton applicato ad f e la derivata prima $h'(x)$. Utilizzare poi *Scilab* per disegnare il grafico di $h'(x)$ sull'intervallo $[-2,2]$.

(4) Con il grafico disegnato al punto precedente determinare un intervallo che, insieme ad h, verifica le ipotesi (1) e (2) del Teorema di convergenza ed utilizzare poi il criterio di scelta del valore iniziale per metodi ad un punto.

E22 Sia $f(x) = e^x + x - 3$.

(1) Determinare il numero di zeri di f e separarli.

(2) Per ciascuno degli zeri di f decidere se il metodo ad un punto definito dalla funzione:

$$h(x) = 3 - e^x$$

sia utilizzabile per approssimare lo zero e, eventualmente, indicare un valore a partire dal quale la successione generata è convergente.

(3) Per ciascuno degli zeri di f decidere se il metodo di Newton sia utilizzabile per approssimare lo zero e, eventualmente, indicare un valore a partire dal quale la successione generata è convergente.

E23 Sia $f(x;t) = x^2 - (10 + \frac{1}{10} + t)x + 1$. Stimare lo scostamento dei rispettivi zeri di $f(x;0)$ e $f(x;0.1)$.

Appendice 1

Siano $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione con derivata seconda continua ed $\alpha \in (a,b)$ un punto unito di h. Se $h'(\alpha) = 0$ il metodo ad un punto definito da h è utilizzabile per approssimare α. Sia allora x_k una successione generata dal metodo e convergente ad α. In questa Appendice si dimostra che se $h''(\alpha) \neq 0$ allora per ogni $\theta \in (0,1)$ si ha:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|\, x_k - \alpha \,|}{\theta^k} = 0$$

Poiché h ha derivata seconda continua, sussiste lo sviluppo di Taylor in α con resto in forma di Lagrange: per ogni $x \in (a,b)$ esiste τ tra x ed α tale che:

$$h(x) = h(\alpha) + h'(\alpha)\,(x - \alpha) + \tfrac{1}{2}\,h''(\tau)\,(x-\alpha)^2$$

ovvero, essendo $h'(\alpha) = 0$:

$$h(x) - h(\alpha) = \tfrac{1}{2}\,h''(\tau)\,(x-\alpha)^2$$

Poiché $h''(\alpha) \neq 0$, eventualmente restringendo $[a,b]$ si ha:

$$0 < \lambda_2 = \min_{[a,b]} |\, h''(x) \,| \leqslant |\, h''(x) \,| \leqslant \max_{[a,b]} |\, h''(x) \,| = L_2$$

Infine, poiché $|\, x_k - \alpha \,| \to 0$, esiste n sufficientemente grande tale che:

$$\frac{L_2}{2}\,|\, x_n - \alpha \,| < 1$$

Si consideri adesso la successione $y_k = x_{n+k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Posto $d_k = |\, y_k - \alpha \,|$, per ogni k numero intero positivo esiste τ_{k-1} tra y_{k-1} ed α tale che:

$$d_k = |\, h(y_{k-1} - h(\alpha) \,| = \tfrac{1}{2}\,|\, h''(\tau_{k-1}) \,|\, d_{k-1}^2$$

e quindi tale che:

$$\frac{\lambda_2}{2}\,d_{k-1}^2 \leqslant d_k \leqslant \frac{L_2}{2}\,d_{k-1}^2 \qquad (*)$$

Ma:

$$d_{k-1} = |\, h(y_{k-2} - h(\alpha) \,| = \tfrac{1}{2}\,|\, h''(\tau_{k-2}) \,|\, d_{k-2}^2$$

quindi:

$$\frac{\lambda_2}{2}\,d_{k-2}^2 \leqslant d_{k-1} \leqslant \frac{L_2}{2}\,d_{k-2}^2$$

Utilizzando la relazione $(*)$ si ottiene allora:

$$\frac{\lambda_2}{2}\left(\frac{\lambda_2}{2}\,d_{k-2}^2\right)^2 \leqslant d_k \leqslant \frac{L_2}{2}\left(\frac{L_2}{2}\,d_{k-2}^2\right)^2$$

ovvero:

$$\left(\frac{\lambda_2}{2}\right)^{1+2} d_{k-2}^{2^2} \leqslant d_k \leqslant \left(\frac{L_2}{2}\right)^{1+2} d_{k-2}^{2^2}$$

Iterando il ragionamento all'indietro si ottiene:

$$\left(\frac{\lambda_2}{2}\right)^{1+2+\cdots+2^{k-1}} d_0^{2^k} \leqslant d_k \leqslant \left(\frac{L_2}{2}\right)^{1+2+\cdots+2^{k-1}} d_0^{2^k}$$

Poiché $1+2+\cdots+2^{k-1} = 2^k - 1$ la relazione si riscrive:

$$\frac{2}{\lambda_2}\left(\frac{\lambda_2}{2}\,d_0\right)^{2^k} \leqslant d_k \leqslant \frac{2}{L_2}\left(\frac{L_2}{2}\,d_0\right)^{2^k}$$

Sia adesso $\theta \in (0,1)$. Posto:

$$\frac{L_2}{2}\,d_0 = \gamma$$

e, per $k \geqslant n, j = k-n$, si ha:

$$0 \leqslant \frac{|\,x_k-\alpha\,|}{\theta^k} = \frac{|\,x_{j+n}-\alpha\,|}{\theta^{j+n}} = \frac{1}{\theta^n}\,\frac{|\,y_j-\alpha\,|}{\theta^j} = \frac{1}{\theta^n}\,\frac{d_j}{\theta^j} \leqslant \frac{1}{\theta^n}\,\frac{2}{L_2}\,\frac{\gamma^{2^j}}{\theta^j} \qquad (**)$$

Poiché:

$$\log\frac{\gamma^{2^j}}{\theta^j} = 2^j\,\log\gamma - j\,\log\theta \to -\infty$$

allora:

$$\frac{\gamma^{2^j}}{\theta^j} \to 0$$

L'asserto segue dalla $(**)$.

Appendice 2

Siano $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione con derivata prima continua, α l'unico punto unito di h e $|\,h'(\alpha)\,| = 1$. Sia infine x_k una successione generata dal metodo iterativo definito da h. In questa appendice si dimostra che se $\lim x_k = \alpha$ e per ogni k si ha $x_k \neq \alpha$ allora:

$$\textit{per ogni } \theta \in (0,1) \textit{ si ha:} \qquad \lim \frac{|\,x_k-\alpha\,|}{\theta^k} = +\infty$$

Sia $x_0 \neq \alpha$. Per ogni j numero intero non negativo, il Teorema di Lagrange assicura l'esistenza di un numero reale t_j tra x_{j+1} e α tale che:

$$|\,x_{j+1}-\alpha\,| = |\,h'(t_j)\,|\,|\,x_j-\alpha\,|$$

Poichè $\lim x_k = \alpha$ si ha anche $\lim t_k = \alpha$ e quindi $\lim |\,h'(t_k)\,| = 1$. Scelto $\theta \in (0,1)$, sia n un numero intero tale che:

$$\text{per ogni } k \geqslant n: \quad |\,h'(t_k)\,| \geqslant \frac{1+\theta}{2}$$

Sia adesso $k > n$. Si ha:

$$\frac{|\,x_k-\alpha\,|}{\theta^k} = \frac{|\,h'(t_{k-1})\,|}{\theta}\cdots\frac{|\,h'(t_n)\,|}{\theta}\,\frac{|\,h'(t_{n-1})\,|}{\theta}\cdots\frac{|\,h'(t_0)\,|}{\theta}\,|\,x_0-\alpha\,|$$

Posto:

$$\Gamma = \frac{|\,h'(t_{n-1})\,|}{\theta}\cdots\frac{|\,h'(t_0)\,|}{\theta}\,|\,x_0-\alpha\,|$$

e constatato che per $k \geqslant n$ si ha:

$$\frac{|\,h'(t_k)\,|}{\theta} \geqslant \frac{1+\theta}{2\theta}$$

si ottiene:

$$\frac{|\, x_k - \alpha \,|}{\theta^k} \geqslant \left(\frac{1+\theta}{2\theta}\right)^{k-n} \Gamma$$

Ma:

$$\theta < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1+\theta}{2\theta} > 1$$

dunque:

$$\lim \left(\frac{1+\theta}{2\theta}\right)^{k-n} \Gamma = +\infty$$

da cui segue l'asserto.