

Esercitazione 7

Istruzioni trattate: rand, xpoly.

Nella prima parte di questa esercitazione studieremo *numericamente* quanto cambia la soluzione di un assegnato sistema di equazioni lineari per *piccole* variazioni del termine noto e confronteremo i risultati con l'asserto del *Teorema di condizionamento*. Nella seconda parte utilizzeremo il simulatore di circuiti lineari di sole resistenze e generatori indipendenti di corrente realizzato nell'Esercitazione 6 per studiare *numericamente* quanto cambiano le tensioni di nodo di un assegnato circuito per *piccole* variazioni del valore dei resistori.

Prima parte

Si consideri \mathbb{R}^2 normato dalla *norma infinito*.

Posto:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

si consideri il sistema di equazioni lineari $Ax = b$. Si constata che A è *invertibile* e quindi il sistema ha una sola soluzione:

$$x^* = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Per ogni $\epsilon_b > 0$, si considerino *tutti* i sistemi $Ax = b + \delta b$ ottenuti *perturbando* il termine noto di $Ax = b$ con un vettore $\delta b \in I(0, \epsilon_b \|b\|)$, ovvero tutti i sistemi ottenuti perturbando $Ax = b$ con perturbazioni sul solo dato b e di misura relativa non superiore a ϵ_b . Ciascuno di questi sistemi ha una sola soluzione: \hat{x} . Posto $\delta x = \hat{x} - x^*$, in base al *Teorema di condizionamento*, si ha:

$$\epsilon_d = \frac{\|\delta x\|}{\|x^*\|} \leq c(A) \epsilon_b$$

dove $c(A)$ è il *numero di condizionamento della matrice A*. Se ne deduce che il vettore δx , *variazione della soluzione del sistema conseguente alla perturbazione*, deve appartenere all'intorno $I(0, c(A) \epsilon_b \|x^*\|)$. Si osservi, inoltre, che δx è la *soluzione del sistema* $Ax = \delta b$. Infatti:

$$A\delta x = A(\hat{x} - x^*) = A\hat{x} - Ax^* = b + \delta b - b = \delta b$$

Calcolati $\|b\| = 1$, $\|x^*\| = \frac{1}{8}$, $c(A) = 64$ e scelto $\epsilon_b = 10^{-1}$, rappresentiamo, su uno stesso piano cartesiano per favorire il confronto, gli intorni $I(0, \epsilon_b \|b\|)$ e $I(0, c(A) \epsilon_b \|x^*\|)$. Si ottiene il disegno riportato in Figura 1. Nell'Esercizio 1 sono riportate (quasi tutte) le istruzioni usate per generare il

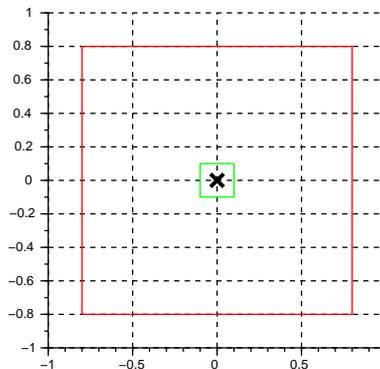


Figura 1: In rosso: $I(0, c(A) \epsilon_b \|x^*\|)$, in verde: $I(0, \epsilon_b \|b\|)$. La crocetta è il centro 0.

disegno.

Il *Teorema di condizionamento* prevede dunque un *valore massimo* per la norma della variazione della soluzione δx pari a $c(A) \epsilon_b \|x^*\|$. Per studiare *numericamente* i valori effettivi di δx risolviamo, utilizzando il procedimento basato sulla procedura EGP, i sistemi perturbati $Ax = b + \delta b$ per δb appartenente ad un *sottoinsieme finito* S di $I(0, \epsilon_b \|b\|)$. Precisamente, posto:

$$t_k = -1 + \frac{k}{3}, \quad k = 0, \dots, 6$$

sia S la *griglia* dei 7×7 punti di coordinate $\epsilon_b \|b\| (t_i, t_j)$, $i, j = 0, \dots, 6$ rappresentata dalle crocette in Figura 2. Per ciascun valore di δb , le istruzioni seguenti determinano la corrispondente

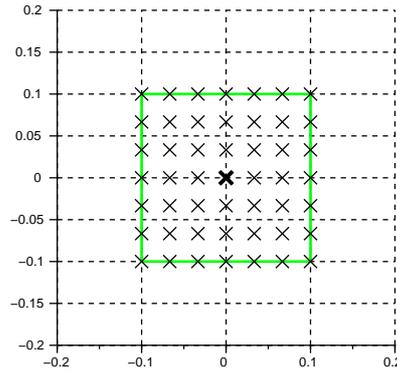


Figura 2: A crocette: il sottoinsieme S ; in verde: $I(0, \epsilon_b \|b\|)$.

approssimazione del vettore δx e la rappresentano, con una crocetta, in un piano cartesiano nel quale è rappresentato anche l'intorno $I(0, c(A) \epsilon_b \|x^*\|)$:

```
// sistema non perturbato e soluzione
A = [2,3;3,5]; b = [5;8] / 8; // ||b|| = 1
[S,D,P] = lu(A);
c = SA(S,P*b);
xe = SI(D,c);
// misura relativa massima della perturbazione db e massimo valore di ||db||
Eps_b = 1d-1;
r_b = Eps_b;
// previsione del Teo di condizionamento per il massimo valore
// di ||dx||: c(A)*Eps_b*||x*||
r = 64 * Eps_b * norm(xe,%inf);
// disegno di I(0,c(A)*Eps_b*||x*||)
Ix = [-r,-r,r,r];
Iy = [-r,r,r,-r];
xpoly(Ix,Iy,'lines',1);
q=gce(); q.foreground=5;
plot2d(0,0,style = -2,rect=1.1*r*[-1,-1,1,1],frameflag = 3);
xgrid();
f=gca(); f.children(1).children.thickness=3;
f.children(2).thickness=2;
// per ogni db in S calcola dx e lo rappresenta sul disegno
N = 7;
db1 = r_b * linspace(-1,1,N)';
db2 = r_b * linspace(-1,1,N)';
for k = 1:N,
    for j = 1:N,
        db = [db1(k);db2(j)];
```

```

c = SA(S,P*db);
dx = SI(D,c);
plot2d(dx(1),dx(2), style = -2);
end
end

```

Si ottiene la Figura 3. Si constata, come asserito dal *Teorema di condizionamento*: (i) che per ogni $\delta b \in S$ il vettore δx appartiene all'intorno $I(0, c(A) \epsilon_b \|x^*\|)$ e (ii) che il valore di b scelto è uno dei possibili valori per i quali per qualche δb il corrispondente δx è sul bordo dell'intorno.

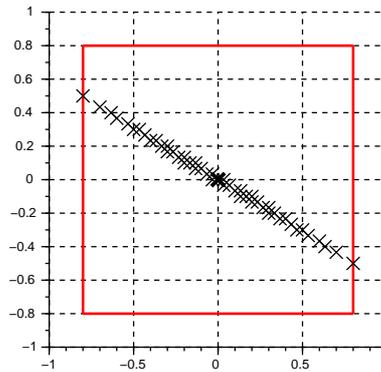


Figura 3: A crocette: il vettori δx corrispondenti a $\delta b \in S$; in rosso: $I(0, c(A) \epsilon_b \|x^*\|)$.

Riguardo alle istruzioni utilizzate, si osservi che mentre le procedure SI ed SA *devono* essere utilizzate per ogni nuovo valore di δb , la procedura EGP può essere utilizzata *una sola volta*. Infatti il risultato della procedura EGP, le matrici da utilizzare nelle procedure SA ed SI, dipende *solo* dalla matrice del sistema, che è *la stessa per ogni* δb .

Se consideriamo come termine noto del sistema non perturbato il vettore:

$$b = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

e studiamo numericamente la variazione della soluzione utilizzando lo stesso insieme S di perturbazioni di b del caso precedente, otteniamo il disegno riportato in Figura 4. Si constata, come asserito dal *Teorema di condizionamento*, che per ogni $\delta b \in S$ il vettore δx appartiene dell'intorno $I(0, c(A) \epsilon_b \|x^*\|)$ ma questa volta per *nessun* $\delta b \in S$ il corrispondente δx è sul bordo dell'intorno.

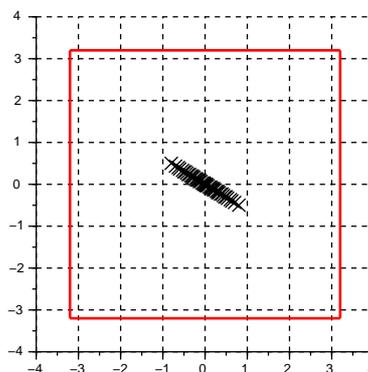


Figura 4: Studio di δx nel caso $b = \frac{1}{2} (1, 2)^T$.

Si osservi che l'insieme dei vettori δx è *indipendente dal valore di* b . Si ricordi, infatti, che δx è la soluzione del sistema $Ax = \delta b$. Dunque le crocette di Figura 3 e quelle di Figura 4 *sono negli*

stessi punti. Quello che rende diverse le due figure è il raggio dell'intorno rappresentato in rosso: nel primo caso vale 0.8, nel secondo 3.2. La differenza è dovuta al diverso valore di $\|x^*\|$, e questo valore dipende da b . In entrambi i casi si è scelto un vettore b di norma infinito pari ad uno e quindi si ha:

$$Ax^* = b \quad \text{da cui} \quad \|b\| = \|Ax^*\| \leq \|A\| \|x^*\| \quad \text{e quindi} \quad \|x^*\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|} = \frac{1}{8}$$

ma nel primo caso si ha $\|x^*\| = \frac{1}{8}$ (il massimo valore possibile), nel secondo $\|x^*\| = \frac{1}{2} > \frac{1}{8}$ (vedere l'Esercizio 3).

Seconda parte

Si consideri il circuito analizzato nella seconda parte dell'Esercitazione 6, riportato in Figura 5. Nell'Esercitazione 6 erano stati assunti, per le resistenze, i valori riportati nella figura. Assumeremo

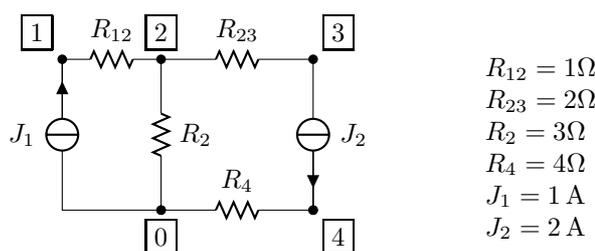


Figura 5: Il circuito considerato

adesso che i resistori siano caratterizzati da un *valore nominale* (in Ω) ed una *tolleranza* (adimensionale, espressa in *percento*). Il *valore effettivo* della resistenza è legato al valore nominale ed alla tolleranza dalla relazione:

$$\text{valore effettivo} = \text{valore nominale} \cdot (1 + t) \quad , \quad |t| \leq \text{tolleranza}$$

La tolleranza è dunque *il massimo valore dell'errore relativo tra il valore effettivo e quello nominale*. Ad esempio, per un resistore di valore nominale 3 k Ω e tolleranza 5% il valore effettivo, in k Ω , sarà compreso nell'intervallo:

$$[3 \cdot (1 - 0.05); 3 \cdot (1 + 0.05)] = [2.85; 3.15]$$

Studieremo *numericamente* l'effetto della presenza di tolleranze nei valori delle resistenze *generando M circuiti*, ciascuno con valori delle resistenze compatibili con i valori nominali e le tolleranze specificate, e *determinando ogni volta la variazione dei valori delle tensioni di nodo* rispetto al circuito con resistori di resistenza pari al valore nominale (*circuito nominale*).

Assumiamo per tutti i resistori *la stessa tolleranza: 5%*. Il file `ReteEs.sce` che contiene la descrizione del circuito è così modificato:

```
// valore dei resistori (in Ohm):
R12 = 1;
R23 = 2;
R2  = 3;
R4  = 4;
// tolleranze:
//   VN = 1: valori nominali, VN = 0: valori reali
t_12 = (1 - VN) * 0.05;
t_23 = (1 - VN) * 0.05;
t_2  = (1 - VN) * 0.05;
t_4  = (1 - VN) * 0.05;
// valore dei generatori di corrente (in A):
J1 = 1;
J2 = 2;
//                               valore                               , nodo 1,  nodo 2
```

```

Res = [ R12 * ( 1 + t_12 * (2*rand()-1) ) ,      1,      2;
        R23 * ( 1 + t_23 * (2*rand()-1) ) ,      2,      3;
        R2  * ( 1 + t_2  * (2*rand()-1) ) ,      2,      0;
        R4  * ( 1 + t_4  * (2*rand()-1) ) ,      0,      4];
//
Gen = [                                     J1 ,      0,      1;
                                     J2 ,      3,      4];
//
//
ReteEs = list(Res, Gen);

```

In questa descrizione compare una nuova istruzione:

- **rand**

Questa *funzione predefinita* realizza un *generatore di numeri casuali* nell'intervallo $[0, 1]$. Precisamente: **rand()** restituisce il valore di una *variabile aleatoria reale con distribuzione uniforme nell'intervallo* $[0, 1]$. Vedere l'Esercizio 4.

La descrizione differisce da quella dell'esercitazione precedente per il *valore* delle resistenze. Ad esempio, il valore della resistenza del resistore R_{12} è dato dall'espressione:

$$R_{12} * (1 + t_{12} * (2*rand() - 1))$$

Assegnato alla variabile **t_12** il valore della tolleranza del resistore, 0 oppure 0.05 a seconda se il parametro VN vale 0 oppure 1, si ha:

$$|t_{12} * (2*rand() - 1)| = 0 \quad \text{oppure} \quad |t_{12} * (2*rand() - 1)| \leq 0.05$$

Il valore della resistenza effettivamente utilizzato in ciascuna simulazione è determinato nel momento in cui la descrizione del circuito viene generata e, presumibilmente, sarà *diverso* ogni volta ma *sempre* compatibile con il valore nominale 1Ω e la tolleranza 5%, ovvero nell'intervallo $[0.95 \Omega ; 1.05 \Omega]$.

Per quantificare l'effetto delle tolleranze si è scelta la *misura relativa, in norma infinito, della variazione del vettore delle tensioni di nodo*. Le istruzioni che seguono calcolano, per $M = 100$ circuiti diversi, la misura relativa della variazione del vettore delle tensioni di nodo e costruiscono un disegno che rappresenta i valori ottenuti.

```

// Stabilisce il numero di circuiti reali da considerare
M = 100;
ERR_E = [];
// Inserire il nome completo del file ReteEs.sce
DefCircuito = '...';
// Inserire il nome completo del file Esercitazione_6_lez.sce, che
// contiene le definizioni delle funzioni SoluzioneRete, SI, SA.
DefAusiliarie = '...';
exec(DefAusiliarie);
// Genera la descrizione del circuito nominale
VN = 1;
exec(DefCircuito);
// Calcola le grandezze di rete nel circuito nominale
[E0,V0,I0] = SoluzioneRete(ReteEs);
for k = 1:M,
    // Genera la descrizione di un circuito reale
    VN = 0;
    exec(DefCircuito);
    // Calcola le grandezze di rete nel circuito reale
    [E,V,I] = SoluzioneRete(ReteEs);
    // Calcola la misura relativa della variazione del vettore E
    ERR_E($+1,1) = norm(E - E0, %inf) / norm(E0, %inf);
end;
clf(); plot2d('nl',[1:M]',ERR_E, style = 5); xgrid();
xlabel('k'); ylabel('ERR_E(k)');

```

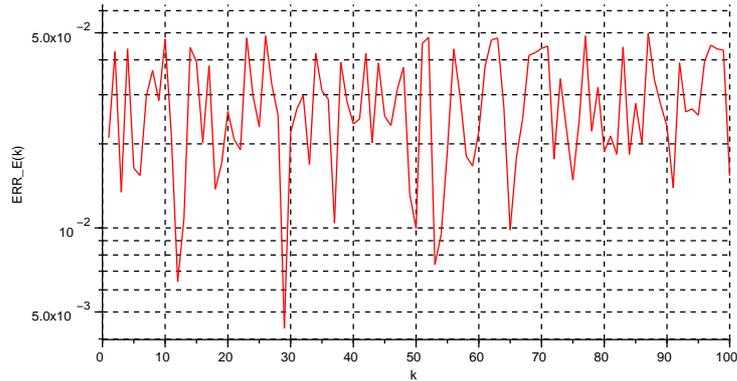


Figura 6: Misura relativa delle variazioni del vettore delle tensioni di nodo.

Si ottiene il disegno riportato in Figura 6.

Esercizi

1. La *funzione predefinita* `xpoly` disegna una *poligonale aperta o chiusa nella finestra corrente*. Precisamente, se x e y sono due vettori di n numeri reali e P_1, \dots, P_n i punti di coordinate, rispettivamente, $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$:

$$\text{xpoly}(x, y)$$

disegna la *poligonale aperta* di vertici, nell'ordine, i punti di coordinate P_1, \dots, P_n , ovvero la poligonale di lati $P_1P_2, \dots, P_{n-1}P_n$,

$$\text{xpoly}(x, y, \text{'lines'}, 1)$$

disegna la *poligonale chiusa* di vertici, nell'ordine, i punti di coordinate P_1, \dots, P_n , ovvero la poligonale di lati P_1P_2, \dots, P_nP_1 .

I comandi:

```
r = 0.8;
Ix = [-r,-r,r,r];
Iy = [-r,r,r,-r];
xpoly(Ix,Iy,'lines',1);
r = 0.1;
Ix = [-r,-r,r,r];
Iy = [-r,r,r,-r];
xpoly(Ix,Iy,'lines',1);
plot2d(0,0,style = -2,rect=[-1,-1,1,1],frameflag = 3);
xgrid();
```

generano un disegno che differisce da quello riportato in Figura 1 per *il colore dei bordi e lo spessore del simbolo che rappresenta il centro degli intorni*. Aggiungere i comandi necessari per riprodurre il disegno riportato in Figura 1 in tutti i particolari.

2. Studiare numericamente la variazione della soluzione del sistema non perturbato $Ax = b$ per:

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

e $\delta b \in S$.

3. Sia M una matrice $n \times n$ ad elementi numeri reali. Dette r_1, \dots, r_n le *righe* di M si ha

$$\|M\|_\infty = \max\{\|r_1^T\|_1, \dots, \|r_n^T\|_1\}$$

Sia $k \in \{1, \dots, n\}$ tale che $\|M\|_\infty = \|r_k^T\|_1$.

(1) Dimostrare che il vettore v di componenti $v_i = \text{segno}(m_{ki})$ ¹ è uno dei vettori tali che $\|Mv\|_\infty = \|M\|_\infty \|v\|_\infty$.

(2) Utilizzare il risultato del punto precedente per determinare x^* tale che:

$$\|Ax^*\|_\infty = \|A\|_\infty \|x^*\|_\infty$$

(3) Giustificare la scelta iniziale di b .

4. Le istruzioni:

```
x = [];  
for i=1:15, x(i) = rand(); end;
```

generano un vettore \mathbf{x} a componenti variabili aleatorie reali con distribuzione uniforme in $[0, 1]$. Disegnare il grafico della funzione $i \mapsto \mathbf{x}(i)$ e calcolare il *valor medio* delle componenti di \mathbf{x} :

$$\text{valor medio} = \frac{\mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_{15}}{15}$$

Ripetere il calcolo dopo aver eseguito nuovamente le istruzioni. Infine, modificare la seconda istruzione in modo che il vettore \mathbf{x} abbia componenti variabili aleatorie reali con distribuzione uniforme in $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$.

5. Ripetere lo studio della variazione dei valori delle tensioni di nodo scegliendo come misura della variazione, per ciascun circuito, il massimo del vettore degli errori relativi delle tensioni di nodo:

$$\max\left\{\frac{|E_i - EO_i|}{|EO_i|}, \quad i = 1, \dots, N\right\}$$

e confrontare il disegno ottenuto con quello riportato in Figura 6.

¹Per ogni numero reale x si ha: $\text{segno}(x) = 1$ se $x > 0$, $\text{segno}(x) = -1$ se $x < 0$, $\text{segno}(x) = 0$ se $x = 0$.