Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Problemi di Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

a.a. 2011/2012

0 Funzionalità matematiche del calcolatore e teoria degli errori

`Problema 1`

Determinare l'esponente e la frazione di $x = \frac{2}{5}$ in base $\beta = 3$.

`Problema 2`

Sia $M = F(2,3)$. Indicare quali dei seguenti numeri appartengono ad M :

$$x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = \frac{1}{3} \quad , \quad x_3 = \frac{1}{16} \quad , \quad x_4 = \frac{3}{16}$$

`Problema 3`

Sia $M = F(10,3)$. Determinare il numero di elementi dell'insieme

$$\{\, \xi \in M \text{ tali che } -10^{-6}\, 0.311 \le \xi \le -10^{-9}\, 0.581 \,\}$$

`Problema 4`

Siano M_2 un insieme di numeri in virgola mobile e base 2 e M_{10} un insieme di numeri in virgola mobile e base 10.

(a) Mostrare che $\frac{1}{10} \in M_{10}$ ma $\frac{1}{10} \notin M_2$, e dedurne che sono falsi gli asserti $M_2 \supset M_{10}$ e $M_2 = M_{10}$.

(b) Mostrare che *per ogni intero positivo k, 2^k non è divisibile per* 10 (e quindi che la cifra delle unità dell'espansione decimale di 2^k è sempre non zero) e che *per ogni intero positivo n esiste k tale che* $2^k > 10^n$; questi due asserti provano che per k sufficientemente grande si ha $2^k \notin M_{10}$, e quindi che è falso anche l'asserto $M_2 \subset M_{10}$.

Problema 5

Sia $M = F(\beta, m)$ e siano $\phi, \psi : M \setminus \{ 0 \} \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$\phi(\xi) = \text{esponente di } \xi \quad , \quad \psi(\xi) = \text{frazione di } \xi$$

Mostrare che per ogni $\xi \in M$ si ha $\psi(\xi) \in M$, ma che ϕ non ha la stessa proprietà. Per ciascuna di tali funzioni, decidere se è monotona.

Problema 6

Sia $M = F(\beta, m)$ e sia $\phi : M \setminus \{ 0 \} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $\phi(\xi) = \sigma(\xi) - \xi$. Mostrare che per ogni $\xi \in M$ si ha $\phi(\xi) \in M$ e decidere se ϕ è monotona.

Problema 7

Sia $M = F(2, 4)$. Posto $\xi = 2^{-3}\, 0.1101 \in M$, indicare per quali interi n si ha $4^n\, \xi \in M$.

Problema 8

Sia $M = F(3, 2)$. Calcolare $\mathrm{rd}(\frac{1}{4})$.

Problema 9

Sia $M = F(10, 3)$. Calcolare $\delta(\frac{1}{27})$.

Problema 10

Sia $M = F(2, 4)$. Decidere se

(a) per ogni $\xi \in M$ si ha $4 \times \xi \in M$

(b) per ogni $\xi \in M$ si ha $\xi / 4 \in M$

(c) per ogni $\xi \in M$ si ha $\xi + 4 \in M$

Problema 11

Sia $M = F(2, 4)$. Mostrare che tutti gli elementi positivi di M con esponente maggiore o uguale a 4 sono interi, e poi determinare il massimo dell'insieme

$$\{ \xi \in M \text{ tali che } \xi > 0 \text{ e } \xi \notin \mathbb{Z} \}$$

Problema 12

Sia $M = F(\beta, m)$. Decidere se per ogni $\xi \in M$ si ha

$$\xi \otimes \xi > 1 \Rightarrow \xi^2 > 1$$

Problema 13

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = x^2 - x$. Determinare la funzione di condizionamento per il problema del calcolo di f in x che esprime l'errore relativo trasmesso dai dati in termini di x e dell'errore relativo sul dato.

`Problema 14`

Siano $M = F(\beta, m)$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = x(x-1)$ e $\phi : M \to M$ la funzione definita da $\phi(\xi) = \xi \otimes (\xi \ominus 1)$. Stimare l'errore algoritmico ϵ_a (commesso utilizzando ϕ per approssimare f in ξ) in termini di ξ ed u.

`Problema 15`

Sia $M = F(10, 2)$. Determinare l'insieme $\{\, \xi \in M$ tali che $0.31 \otimes \xi = 0.31 \,\}$.

`Problema 16`

Siano $M = F(\beta, m)$ e $\texttt{SEN} : M \to M$ la funzione definita da $\texttt{SEN}(\xi) = \mathrm{rd}(\mathrm{sen}\, \xi)$. Si utilizza la funzione $\phi(\xi) = \texttt{SEN}(\xi) \oslash \xi$ per approssimare la funzione $f(x) = \frac{\mathrm{sen}\, x}{x}$. Stimare l'errore algoritmico ϵ_a in termini di ξ ed u.

`Problema 17`

Siano f la funzione definita, per $x \in \mathbb{R}$, da $f(x) = e^{-x}$ e $\texttt{EXP}$ la funzione definita, per $\xi \in M$ da $\texttt{EXP}(\xi) = \mathrm{rd}(e^{\xi})$. Posto $\phi(\xi) = 1 \oslash \texttt{EXP}(\xi)$, stimare l'errore algoritmico ϵ_a (commesso utilizzando ϕ per approssimare f in ξ) in termini di ξ ed u.

`Problema 18`

Indicare l'errore relativo che si commette approssimando

$$10 \text{ con } 20 \quad , \quad 5 \cdot 10^{-6} \text{ con } 10^{-5} \quad , \quad 1 \text{ con } 2$$

`Problema 19`

Sia $M = F(\beta, m)$ un insieme di numeri di macchina. Per ciascuno dei seguenti asserti decidere se è vero o falso:

(1) l'errore relativo commesso approssimando $x \in \mathbb{R}$ con $\mathrm{rd}(x)$ è minore o uguale ad u;

(2) l'errore assoluto commesso approssimando $x \in \mathbb{R}$ con $\mathrm{rd}(x)$ è minore o uguale ad 1;

(3) se $\xi \in M$, anche $\beta^2 \xi \in M$;

(4) se $x \in \mathbb{R}$ e $\mathrm{rd}(x) = 0$, allora $x = 0$;

(5) gli intervalli $[\beta, \beta^2]$ e $[\beta^{10}, \beta^{11}]$ contengono lo stesso numero di elementi di M.

`Problema 20`

Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione e

$$F(x, \epsilon) = 3\epsilon x - 6\epsilon^2$$

la funzione di condizionamento per il problema del calcolo di f in x, che esprime l'errore relativo trasmesso dal dato in funzione del dato x e dell'errore relativo ϵ sul dato.

Calcolare

$$\frac{f(6) - f(3)}{f(3)}$$

`Problema 21`

Sia $M = F(10, 2)$. Calcolare $\mathrm{rd}(2^{-3}0.1011)$.

`Problema 22`

Determinare tutti gli elementi di $\mathbb{R}$ che approssimano 7 con errore relativo inferiore a $\frac{1}{10}$ in valore assoluto.