Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Problemi di Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

a.a. 2011/2012

2 Sistemi di equazioni lineari

In questa Sezione, le frasi "(la procedura) `XX` termina su x" e "(la funzione) `XX` è definita in x" hanno lo stesso significato.

`Problema 1`

Dimostrare che se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è una matrice simmetrica definita positiva e $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è una matrice di permutazione, allora $B = P^{\mathsf{T}}AP$ è simmetrica definita positiva.

(Suggerimento: utilizzare la definizione di matrice simmetrica definita positiva.)

`Problema 2`

Utilizzando la definizione, dimostrare che se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è una matrice simmetrica definita positiva allora per $k = 1, \dots, n$ si ha $a_{kk} > 0$.

`Problema 3`

Sia

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Determinare $\mathtt{EG}(A)$.

`Problema 4`

Sia $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, e siano $r_1, \dots, r_4$ le sue righe. Posto

$$B = \begin{bmatrix} r_1 \\ 2r_1 + r_2 \\ -r_1 + r_3 \\ -r_4 \end{bmatrix}$$

(1) determinare una matrice $H \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ tale che

$$HA = B$$

(2) decidere se la matrice trovata è l'unica che soddisfa la proprietà richiesta.

(3) dopo aver verificato che H risulta invertibile, determinare H^{-1}.

(Suggerimento: non calcolare l'inversa direttamente ma ragionando sulle righe di A e B e sul fatto che $H^{-1}B = A$.)

`Problema 5`

Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matrice triangolare superiore invertibile.

(1) Verificare che se $Ax = e_j$ allora $x_k = 0$ per $k > j$.

(2) Verificare che A^{-1} è triangolare superiore.

`Problema 6`

Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matrice triangolare superiore con $a_{kk} = 1$ per $k = 1, \dots, n$.

(1) Verificare che se $Ax = e_j$ allora $x_j = 1$ e $x_k = 0$ per $k > j$.

(2) Verificare che $B = A^{-1}$ è triangolare superiore con $b_{kk} = 1$ per $k = 1, \dots, n$.

`Problema 7`

Per ogni $a \in \mathbb{R}$, si consideri la matrice

$$A(a) = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

(1) Determinare l'insieme $T = \{\, a \in \mathbb{R}$ tali che `EG` termina su $A(a)\,\}$, e per ciascun $a \in T$ indicare la fattorizzazione LR individuata da `EG.`

(2) Descrivere come si possano utilizzare i risultati otenuti in (1) per determinare l'insieme $P = \{\, a \in \mathbb{R}$ tali che $A(a)$ è definita positiva$\,\}$.

`Problema 8`

Si consideri la matrice simmetrica

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 14 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

(1) indicare la fattorizzazione LR individuata da `EG` ed utilizzarla per decidere se A sia definita positiva;

(2) detta S, D la fattorizzazione LR determinata in (1), indicare Δ diagonale ad elementi non negativi tale che $A = S\Delta S^{\mathsf{T}}$;

(3) utilizzare i risultati ottenuti in (2) per determinare L triangolare inferiore tale che $A = LL^{\mathsf{T}}$ (suggerimento: determinare M diagonale tale che $\Delta = MM^{\mathsf{T}}$);

(4) mostrare che per ogni $x \in \mathbb{R}^3$ si ha $x^{\mathsf{T}}Ax = ||L^{\mathsf{T}}x||_2^2$.

Problema 9

Determinare l'insieme

$$\mathcal{D} = \{\, a, b, c \in \mathbb{R} \text{ tali che } \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \text{ è definita positiva.} \}$$

Problema 10

Siano

$$M = \begin{bmatrix} 1 & & & 2 & & \\ & 1 & & -1 & & \\ & & 1 & 6 & & \\ & & & 1 & & \\ & & & 2 & 1 & \\ & & & 3 & & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 6}$$

(1) Determinare MA;

(2) Determinare M^{-1}.

Problema 11

La procedura `EGP` (eliminazione di Gauss con pivoting) applicata ad una matrice $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ produce le matrici seguenti:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad V = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinare A.

Problema 12

Determinare una fattorizzazione QR della matrice

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

ed utilizzarla per calcolare M^{-1}.

Problema 13

Sia

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Disegnare l'insieme dei punti $\hat{x} \in \mathbb{R}^2$ che verificano la disuguaglianza:

$$\frac{N(\hat{x} - x)}{N(x)} \leq 1$$

per $N = N_2$ e poi per $N = N_1$.

Problema 14

Determinare una fattorizzazione LR della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

utilizzando il procedimento di Doolittle. Decidere se quella trovata sia l'unica fattorizzazione LR di A esistente.

Problema 15

Determinare almeno due fattorizzazioni LR distinte della matrice

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Problema 16

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Operando in $\mathbb{R}$, determinare le matrici P (di permutazione), S e D (fattorizzazione LR di PA) prodotte applicando ad A la procedura `EGPP`.

Problema 17

Per ogni $a \in \mathbb{R}$, sia

$$A(a) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinare *tutti* gli $a \in \mathbb{R}$ per i quali $\mathtt{EG}(A(a))$ è definita e per ogni $a \in \mathbb{R}$ discutere l'esistenza di fattorizzazioni LR di $A(a)$.

Problema 18

Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Per ciascuno dei seguenti asserti, decidere se sia vero o falso:

(a) *Se* A è a predominanza diagonale forte per righe *allora* $-A$ lo è per colonne.

(b) *Se* A è a predominanza diagonale forte per righe *allora* A^T lo è per colonne.

(c) *Se* A è a predominanza diagonale forte per righe *allora* $2A$ lo è per colonne.

Problema 19

Sia $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ simmetrica e tale che $Av \bullet v = v_3^2 + 2v_1v_2$. Decidere se A sia *definita positiva.*

Problema 20

Per ogni $a \in \mathbb{R}$, sia

$$A(a) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -a \end{bmatrix}$$

Determinare *tutti* gli $a \in \mathbb{R}$ per i quali $A(a)$ è definita positiva.

`Problema 21`

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simmetrica. Per ciascuno dei seguenti asserti, decidere se sia vero o falso:

(a) *Se* `EG` è definita in A *allora* A è definita positiva.

(b) *Se* A è definita positiva *allora* A è invertibile.

(c) *Se* A è definita positiva *allora* `EGP` è definita in A.

`Problema 22`

Determinare una fattorizzazione QR della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ed utilizzarla per risolvere il sistema

$$Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

`Problema 23`

Determinare il numero di condizionamento in norma due della matrice

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

`Problema 24`

Siano $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ e si consideri il sistema $Ax = b$. Operando in $\mathbb{R}$, la procedura

(1) $(S, D) = \mathtt{EG}(A)$

(2) $c = \mathtt{SA}(S, b)$

(3) $x = \mathtt{SI}(D, c)$

determina (se ciascuno dei tre passi termina) la soluzione del sistema.

Indicare come determinare la soluzione del sistema (operando in $\mathbb{R}$) utilizzando le funzioni $\mathtt{SA}, \mathtt{SI}$ e `qr` (che determina una fattorizzazione QR della matrice a cui si applica).

`Problema 25`

Siano M un insieme di numeri di macchina, e $\phi : M^n \times M^n \to M$ la funzione definita da

$$\phi(v, w) = (v_1 \oplus w_1) \otimes \cdots \otimes (v_n \oplus w_n)$$

ed utilizzata per approssimare $v \bullet w$, prodotto scalare canonico in $\mathbb{R}^n$ di ve w.

Indicare come utilizzare ϕ per approssimare, assegnati $A \in M^{n\times n}$ e $z \in M^n$, il prodotto $Az \bullet z$. Determinare infine il costo aritmetico di ϕ e della procedura indicata.

`Problema 26`

Siano $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ invertibile e $b \in \mathbb{R}^2$ tali che

$$x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

risolve il sistema $Ax = b$.

Sapendo che $\mu_\infty(A) = 500$, determinare (e disegnare) l'insieme delle possibili soluzioni del sistema ottenuto da $Ax = b$ perturbando il dato b in modo che $\epsilon_b = 10^{-3}$.