Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Problemi di Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

a.a. 2011/2012

3 Interpolazione

`Problema 1`

Determinare la forma di Newton dell'elemento di $P_2(\mathbb{R})$ che interpola i dati $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,2)$.

`Problema 2`

Siano $W = \langle t, t^2 \rangle$, t_0, t_1 reali distinti e y_0, y_1 reali. Determinare tutti gli elementi di W che interpolano i dati (t_0, y_0), (t_1, y_1).

`Problema 3`

Mostrare che l'unico elemento di $\langle 1, t, te^t \rangle$ che si annulla per $t = 0, t = 1$ e $t = 2$ è la funzione nulla (si riformuli la domanda come problema lineare di interpolazione).

`Problema 4`

Sia $G = \langle x_1^2, x_1x_2, x_2^2 \rangle \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Mostrare che per ogni y_1, y_2 e y_3 reali esiste un solo elemento di G che interpola i dati

$$(1,0), y_1 \quad ; \quad (0,1), y_2 \quad ; \quad (1,1), y_3$$

`Problema 5`

Siano $p_1, p_2 \in P_3(\mathbb{R})$. Decidere se

$$\begin{array}{rcl} p_1(0) & = & p_2(0) \\ p_1(1) & = & p_2(1) \\ p_1(-1) & = & p_2(-1) \end{array} \quad \Rightarrow \quad p_1 = p_2$$

Problema 6

Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbf{R}\backslash\{0, 1, -1\}$ per i quali esistono elementi di $P_2(\mathbf{R})$ che interpolano i dati

$$(-1, 0) \quad , \quad (0, \tfrac{1}{2}) \quad , \quad (\alpha, 1) \quad , \quad (1, 0)$$

Problema 7

Sia N un intero positivo e $h = \frac{2}{N}$. Posto $t_j = hj$ per $j = 0, \ldots, N$, siano c la funzione di campionamento agli istanti $t_0, \ldots, t_N$ ed r la funzione di ricostruzione mediante funzioni continue lineari a tratti (su $[t_0, t_1], \ldots, [t_{N-1}, t_N]$) relativa a c.

Determinare un valore di N che garantisce un errore di ricostruzione inferiore a $\frac{1}{10}$ per la funzione $\operatorname{sen} t + \cos 3t$ sull'intervallo $[0, 2]$.

Problema 8

Siano $f(t) = \frac{1}{t}$ e $p(t)$ l'elemento di $P_1(\mathbf{R})$ che interpola i dati $(1, f(1)), (2, f(2))$. Dopo aver disegnato il grafico di f e di p per $t \in [1, 2]$, Determinare (analiticamente!)

$$E = \max_{t \in [1,2]} |f(t) - p(t)|$$

e verificare che, posto

$$M_2 = \max_{t \in [1,2]} |f^{(2)}(t)| \quad \text{e} \quad h = 2 - 1$$

si ha

$$E < \frac{M_2}{8} h^2$$

Problema 9

Determinare tutti gli elementi $p \in P_2(\mathbf{R})$ per i quali la funzione

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{per } t < 0 \\ p(t) & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$$

risulta (continua e) derivabile su $\mathbf{R}$.

Problema 10

Determinare tutti gli elementi $h \in P_3(\mathbf{R})$ tali che

$$h(0) = 0 \quad , \quad h^{(1)}(0) = \frac{1}{2} \quad , \quad h(1) = 1 \quad , \quad h^{(1)}(1) = 2$$

Problema 11

Siano $f(t) = e^{-t^2}$, N un intero positivo e $h = \frac{1}{N}$. Posto $t_j = hj$ per $j = 0, \ldots, N$, siano c la funzione di campionamento agli istanti $t_0, \ldots, t_N$ ed r la funzione di ricostruzione mediante funzioni continue lineari a tratti (su $[t_0, t_1], \ldots, [t_{N-1}, t_N]$) relativa a c. Infine, posto $s_N = r(c(f))$, siano

$$I = \int_0^1 f(t)\, dt \quad \text{e} \quad J_N = \int_0^1 s_N(t)\, dt$$

(1) Mostrare che per ogni $t \in [0, 1]$ si ha $|f''(t)| \leqslant 6$;

(2) Determinare un valore di N che garantisce $|I - J_N| \leqslant \frac{1}{10}$.

`Problema 12`

Se N è un intero positivo, e $f : [-1,1] \to \mathbf{R}$ una funzione, la sequenza di comandi Octave

```
octave:1> t = linspace(-1,1,N);
octave:2> y = f(t);
octave:3> plot(t,y)
```

genera la riga $t = (t_1, \ldots, t_N)$ di componenti $t_j = -1 + \frac{2}{N-1}(j-1), j = 1, \ldots, N$ e la riga $y = (y_1, \ldots, y_N)$ di componenti $y_j = f(t_j), j = 1, \ldots, N$ e poi, detta c la funzione di campionamento agli istanti $t_1, \ldots, t_N$ ed r la funzione di ricostruzione mediante funzioni continue lineari a tratti (su $[t_1, t_2], \ldots, [t_{N-1}, t_N]$) relativa a c, disegna il grafico di $r(c(f))$ (ovvero, dell'unica funzione continua lineare a tratti su $[t_1, t_2], \ldots, [t_{N-1}, t_N]$ che interpola i dati $(t_1, y_1), \ldots, (t_N, y_N)$).

Posto $f(t) = \cosh t$:

(1) Mostrare che per ogni $t \in [-1,1]$ si ha $|f''(t)| \leqslant e$;

(2) Determinare un valore di N che garantisce un errore di ricostruzione relativo ad f inferiore a $\frac{1}{100}$ su $[-1,1]$.

(3) Stimare l'errore di ricostruzione relativo ad f che si ottiene su $[-1,1]$ per $N = 100$.

`Problema 13`

Siano $t_j = j - 1, j = 1, \ldots, 6$ e si consideri la funzione di ricostruzione

$$r : \mathbf{R}^6 \to \mathcal{C}([0,5], \mathbf{R})$$

che associa all'elemento di $\mathbf{R}^6$ di componenti $y_1, \ldots, y_6$ la funzione continua lineare a tratti su $[t_1, t_2], \ldots, [t_5, t_6]$ che interpola i dati $(t_1, y_1), \ldots, (t_6, y_6)$.

(1) Detta $e_1, \ldots, e_6$ la base canonica di $\mathbf{R}^6$, per ciascun $j = 1, \ldots, 6$ si disegni il grafico di $s_j = r(e_j)$;

(2) Posto $\sigma = 4s_1 + 3s_2 - s_3 + 7s_5 - 2s_6$, indicare $y \in \mathbf{R}^6$ tale che $\sigma = r(y)$.

4 Approssimazione: minimi quadrati

`Problema 1`

Si consideri $\mathbf{R}^4$ con prodotto scalare canonico e siano

$$W = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle \quad , \quad v = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Decidere se x è la migliore approssimazione di v in W nel senso dei minimi quadrati. (Suggerimento: verificare se $x \in W$ e $v - x \perp W$.)

`Problema 2`

Siano

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \hat{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Decidere se $\hat{x}$ è soluzione del sistema $Ax = b$ nel senso dei minimi quadrati. (Suggerimento: verificare se $A^{\mathsf{T}}(A\hat{x}) = A^{\mathsf{T}}b$ ovvero se $A^{\mathsf{T}}(A\hat{x} - b) = 0$.)

`Problema 3`

Sia $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ definita da

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + (x_1 - x_2 + x_3 - 1)^2 + (x_1 - 4x_2 - 2)^2$$

Dopo aver determinato $A \in \mathbf{R}^{5\times 3}$ e $b \in \mathbf{R}^5$ tali che per ogni $x \in \mathbf{R}^3$ si abbia

$$F(x) = ||Ax - b||_2^2$$

si determini per quale $\hat{x} \in \mathbf{R}^3$ la funzione F assume valore minimo.

`Problema 4`

Determinare l'elemento di $\langle 1, t \rangle$ che meglio approssima i dati

$$(-2, 0) \quad , \quad (-1, 1) \quad , \quad (0, 1) \quad , \quad (1, -1) \quad , \quad (2, 0)$$

nel senso dei minimi quadrati.

`Problema 5`

Siano

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Determinare una fattorizzazione QR di A ed utilizzarla per risolvere il sistema $Ax = b$ nel senso dei minimi quadrati.

```
Problema 6
```

Si consideri $\mathbf{R}^4$ con prodotto scalare canonico e siano

$$W = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle \quad , \quad v = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sia w la migliore approssimazione di v in W nel senso dei minimi quadrati. Determinare w e calcolare il residuo quadratico $\rho = ||v - w||_2^2$.

```
Problema 7
```

Si consideri $\mathbf{R}^4$ con prodotto scalare canonico e siano

$$W^* = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle \quad , \quad v = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Siano w^* la migliore approssimazione di v in W^* nel senso dei minimi quadrati, e $\rho^* = ||v - w^*||_2^2$ il residuo quadratico.

Confrontare i dati con quelli del Problema precedente, decidere se $\rho^* > \rho$ e *poi* determinare w^* e ρ^*.

```
Problema 8
```

In un piano cartesiano si considerino i punti $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 0)$ e $P_3 = (1, 1)$. Se P e Q sono due punti del piano cartesiano, si indichi con $d(P, Q)$ la loro distanza (la lunghezza del segmento che li congiunge).

(1) Determinare $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ che rende minima la funzione:

$$F(x_1, x_2) = 9\, d(x, P_1)^2 + 4\, d(x, P_2)^2 + 16\, d(x, P_3)^2$$

(2) Riformulare il problema come minimizzazione dell'energia potenziale di un sistema di punti materiali di peso trascurabile collegati da molle.

```
Problema 9
```

Se n è un intero positivo ed x, y due elementi di $\mathbf{R}^k$, $k \geqslant n$, il comando Octave

```
octave:1> p = polyfit(x,y,n)
```

genera la riga $p = (p_n, \ldots, p_0)$ i cui elementi sono i coefficienti del polinomio

$$p_0 + p_1 x + \cdots + p_n x^n \in P_n(\mathbf{R})$$

che meglio approssima i dati (x_1, y_1), ..., (x_k, y_k) nel senso dei minimi quadrati.

Posto $x = (0, 0, 1, 2)$ e $y = (1, 2, 1, 0)$ si ha:

```
octave:1> p = polyfit(x,y,2)
p = -0.25000  -0.25000   1.50000
```

Verificare che il polinomio

$$\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{4}x - \tfrac{1}{4}x^2$$

è l'elemento di $P_2(\mathbf{R})$ che meglio approssima i dati (quali?) nel senso dei minimi quadrati.

(Suggerimento: verificare che la colonna $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})^\mathsf{T}$ è soluzione nel senso dei minimi quadrati del sistema ...)