



Problemi di Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

a.a. 2008/2009

0 Algebra lineare: complementi

Problema 1

Siano $A, U \in \mathbf{R}^{n \times n}$ con U ortogonale. Dimostrare che

- (a) $\|UA\|_2 = \|A\|_2$. (Suggerimento: utilizzare la definizione di norma indotta.)
- (b) $\|AU\|_2 = \|A\|_2$. (Risposta: utilizzare la nota espressione della norma due ed osservare che matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico, e quindi lo stesso raggio spettrale.)

Problema 2

Siano $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^{n \times n}$. Dimostrare che per $N \in \{N_1, N_2, N_\infty\}$ si ha

$$\max\{N(a_1), \dots, N(a_n)\} \leq \|A\|_N$$

(Suggerimento: usare la definizione di norma indotta.)

Problema 3

Disegnare l'insieme degli $x \in \mathbf{R}^2$ tali che

$$\|x - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\|_1 = 1$$

Problema 4

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Calcolare $\|A\|_1$ ed indicare $v \in \mathbf{R}^3$ tale che $\|Av\|_1 = \|A\|_1$ e $w \in \mathbf{R}^3$ tale che $\|Aw\|_1 < \|A\|_1$.

Problema 5

Siano $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ e $x_1, \dots, x_4 \in \mathbf{R}^n$ tali che

i	$\ x_i\ $	$\ Ax_i\ $
1	1	10
2	10	10
3	25	6
4	10^{-3}	100

Indicare un limite inferiore per $\|A\|$.

3 Sistemi di equazioni lineari

In questa Sezione, le frasi “(la procedura) **XX** termina su x ” e “(la funzione) **XX** è definita in x ” hanno lo stesso significato.

Problema 1

Dimostrare che se $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ è una matrice simmetrica definita positiva e $P \in \mathbf{R}^{n \times n}$ è una matrice di permutazione, allora $B = P^T A P$ è simmetrica definita positiva.

(Suggerimento: utilizzare la definizione di matrice simmetrica definita positiva.)

Problema 2

Utilizzando la definizione, dimostrare che se $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ è una matrice simmetrica definita positiva allora per $k = 1, \dots, n$ si ha $a_{kk} > 0$.

Problema 3

Sia

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$$

Determinare $\text{EG}(A)$.

Problema 4

Sia $A \in \mathbf{R}^{4 \times 4}$, e siano r_1, \dots, r_4 le sue righe. Posto

$$B = \begin{bmatrix} r_1 \\ 2r_1 + r_2 \\ -r_1 + r_3 \\ -r_4 \end{bmatrix}$$

- (1) determinare una matrice $H \in \mathbf{R}^{4 \times 4}$ tale che

$$HA = B$$

- (2) decidere se la matrice trovata è l'unica che soddisfa la proprietà richiesta.

- (3) dopo aver verificato che H risulta invertibile, determinare H^{-1} .

(Suggerimento: non calcolare l'inversa direttamente ma ragionando sulle righe di A e B e sul fatto che $H^{-1}B = A$.)

Problema 5

Sia $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ una matrice triangolare superiore invertibile.

- (1) Verificare che se $Ax = e_j$ allora $x_k = 0$ per $k > j$.

- (2) Verificare che A^{-1} è triangolare superiore.

Problema 6

Sia $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ una matrice triangolare superiore con $a_{kk} = 1$ per $k = 1, \dots, n$.

- (1) Verificare che se $Ax = e_j$ allora $x_j = 1$ e $x_k = 0$ per $k > j$.

- (2) Verificare che $B = A^{-1}$ è triangolare superiore con $b_{kk} = 1$ per $k = 1, \dots, n$.

Problema 7

Per ogni $a \in \mathbf{R}$, si consideri la matrice

$$A(a) = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

- (1) Determinare l'insieme $T = \{a \in \mathbf{R} \text{ tali che EG termina su } A(a)\}$, e per ciascun $a \in T$ indicare la fattorizzazione LR individuata da EG.
- (2) Descrivere come si possano utilizzare i risultati ottenuti in (1) per determinare l'insieme $P = \{a \in \mathbf{R} \text{ tali che } A(a) \text{ è definita positiva}\}$.

Problema 8

Si consideri la matrice simmetrica

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 14 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$$

- (1) indicare la fattorizzazione LR individuata da EG ed utilizzarla per decidere se A sia definita positiva;
- (2) detta S, D la fattorizzazione LR determinata in (1), indicare Δ diagonale ad elementi non negativi tale che $A = S\Delta S^T$;
- (3) utilizzare i risultati ottenuti in (2) per determinare L triangolare inferiore tale che $A = LL^T$ (suggerimento: determinare M diagonale tale che $\Delta = MM^T$);
- (4) mostrare che per ogni $x \in \mathbf{R}^3$ si ha $x^T Ax = \|L^T x\|_2^2$.

Problema 9

Determinare l'insieme

$$\mathcal{D} = \{a, b, c \in \mathbf{R} \text{ tali che } \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \text{ è definita positiva.}\}$$

Problema 10

Siano

$$M = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_6 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{6 \times 6}$$

- (1) Determinare MA ;
- (2) Determinare M^{-1} .

Problema 11

La procedura EGP (eliminazione di Gauss con pivoting) applicata ad una matrice $A \in \mathbf{R}^{4 \times 4}$ produce le matrici seguenti:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinare A .

Problema 12

Determinare una fattorizzazione QR della matrice

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

ed utilizzarla per calcolare M^{-1} .

Problema 13

Sia

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^2$$

Disegnare l'insieme dei punti $\hat{x} \in \mathbf{R}^2$ che verificano la disuguaglianza:

$$\frac{N(\hat{x} - x)}{N(x)} \leq 1$$

per $N = N_2$ e poi per $N = N_1$.

Problema 14

Determinare una fattorizzazione LR della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

utilizzando il procedimento di Doolittle. Decidere se quella trovata sia l'unica fattorizzazione LR di A esistente.

Problema 15

Determinare almeno due fattorizzazioni LR distinte della matrice

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Problema 16

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Operando in \mathbf{R} , determinare le matrici P (di permutazione), S e D (fattorizzazione LR di PA) prodotte applicando ad A la procedura EGPP.

Problema 17

Per ogni $a \in \mathbf{R}$, sia

$$A(a) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinare *tutti* gli $a \in \mathbf{R}$ per i quali $\text{EG}(A(a))$ è definita e per ogni $a \in \mathbf{R}$ discutere l'esistenza di fattorizzazioni LR di $A(a)$.

Problema 18

Sia $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$. Per ciascuno dei seguenti asserti, decidere se sia vero o falso:

- (a) Se A è a predominanza diagonale forte per righe allora $-A$ lo è per colonne.
- (b) Se A è a predominanza diagonale forte per righe allora A^T lo è per colonne.
- (c) Se A è a predominanza diagonale forte per righe allora $2A$ lo è per colonne.

Problema 19

Sia $A \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$ simmetrica e tale che $Av \bullet v = v_3^2 + 2v_1v_2$. Decidere se A sia *definita positiva*.

Problema 20

Per ogni $a \in \mathbf{R}$, sia

$$A(a) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -a \end{bmatrix}$$

Determinare *tutti* gli $a \in \mathbf{R}$ per i quali $A(a)$ è definita positiva.

Problema 21

Sia $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ simmetrica. Per ciascuno dei seguenti asserti, decidere se sia vero o falso:

- (a) Se EG è definita in A allora A è definita positiva.
- (b) Se A è definita positiva allora A è invertibile.
- (c) Se A è definita positiva allora EGP è definita in A .

Problema 22

Determinare una fattorizzazione QR della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ed utilizzarla per risolvere il sistema

$$Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Problema 23

Determinare il numero di condizionamento in norma due della matrice

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Problema 24

Siano $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbf{R}^n$ e si consideri il sistema $Ax = b$. Operando in \mathbf{R} , la procedura

$$(1) (S, D) = \text{EG}(A)$$

$$(2) c = \text{SA}(S, b)$$

$$(3) x = \text{SI}(D, c)$$

determina (se ciascuno dei tre passi termina) la soluzione del sistema.

Indicare come determinare la soluzione del sistema (operando in \mathbf{R}) utilizzando le funzioni SA, SI e qr (che determina una fattorizzazione QR della matrice a cui si applica).

Problema 25

Siano M un insieme di numeri di macchina, e $\phi : M^n \times M^n \rightarrow M$ la funzione definita da

$$\phi(v, w) = (v_1 \oplus w_1) \otimes \cdots \otimes (v_n \oplus w_n)$$

ed utilizzata per approssimare $v \bullet w$, prodotto scalare canonico in \mathbf{R}^n di v e w .

Indicare come utilizzare ϕ per approssimare, assegnati $A \in M^{n \times n}$ e $z \in M^n$, il prodotto $Az \bullet z$. Determinare infine il costo aritmetico di ϕ e della procedura indicata.

Problema 26

Siano $A \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$ invertibile e $b \in \mathbf{R}^2$ tali che

$$x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

risolve il sistema $Ax = b$.

Sapendo che $\mu_\infty(A) = 500$, determinare (e disegnare) l'insieme delle possibili soluzioni del sistema ottenuto da $Ax = b$ perturbando il dato b in modo che $\epsilon_b = 10^{-3}$.