**Dipartimento di Matematica Applicata**
**« Ulisse Dini »**

# Problemi di Calcolo Numerico

**Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni**

a.a. 2008/2009

## 4 Interpolazione

`Problema 1`

Determinare la forma di Newton dell'elemento di $P_2(\mathbf{R})$ che interpola i dati $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,2)$.

`Problema 2`

Siano $W = \langle t, t^2 \rangle$, $t_0, t_1$ reali distinti e $y_0, y_1$ reali. Determinare tutti gli elementi di $W$ che interpolano i dati $(t_0, y_0)$, $(t_1, y_1)$.

`Problema 3`

Mostrare che l'unico elemento di $\langle 1, t, te^t \rangle$ che si annulla per $t = 0, t = 1$ e $t = 2$ è la funzione nulla (si riformuli la domanda come problema lineare di interpolazione).

`Problema 4`

Sia $G = \langle x_1^2, x_1x_2, x_2^2 \rangle \subset \mathcal{C}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$. Mostrare che per ogni $y_1, y_2$ e $y_3$ reali esiste un solo elemento di $G$ che interpola i dati

$$(1,0), y_1 \quad ; \quad (0,1), y_2 \quad ; \quad (1,1), y_3$$

`Problema 5`

Siano $p_1, p_2 \in P_3(\mathbf{R})$. Decidere se

$$\begin{array}{rcl} p_1(0) & = & p_2(0) \\ p_1(1) & = & p_2(1) \\ p_1(-1) & = & p_2(-1) \end{array} \quad \Rightarrow \quad p_1 = p_2$$

`Problema 6`

Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbf{R} \backslash \{0, 1, -1\}$ per i quali esistono elementi di $P_2(\mathbf{R})$ che interpolano i dati

$$(-1,0) \quad , \quad (0, \tfrac{1}{2}) \quad , \quad (\alpha, 1) \quad , \quad (1,0)$$

`Problema 7`

Sia $N$ un intero positivo e $h = \frac{2}{N}$. Posto $t_j = hj$ per $j = 0, \dots, N$, siano $c$ la funzione di campionamento agli istanti $t_0, \dots, t_N$ ed $r$ la funzione di ricostruzione mediante funzioni continue lineari a tratti (su $[t_0, t_1], \dots, [t_{N-1}, t_N]$) relativa a $c$.

Determinare un valore di $N$ che garantisce un errore di ricostruzione inferiore a $\frac{1}{10}$ per la funzione $\operatorname{sen} t + \cos 3t$ sull'intervallo $[0, 2]$.

`Problema 8`

Siano $f(t) = \frac{1}{t}$ e $p(t)$ l'elemento di $P_1(\mathbf{R})$ che interpola i dati $(1, f(1)), (2, f(2))$. Dopo aver disegnato il grafico di $f$ e di $p$ per $t \in [1, 2]$, Determinare (analiticamente!)

$$E = \max_{t \in [1,2]} |f(t) - p(t)|$$

e verificare che, posto

$$M_2 = \max_{t \in [1,2]} |f^{(2)}(t)| \quad \text{e} \quad h = 2 - 1$$

si ha

$$E < \frac{M_2}{8} h^2$$

## 5 Approssimazione: minimi quadrati

`Problema 1`

Siano

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \hat{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Decidere se $\hat{x}$ è soluzione del sistema $Ax = b$ nel senso dei minimi quadrati. (Suggerimento: verificare che $A^{\mathsf{T}}(A\hat{x}) = A^{\mathsf{T}}b$ ovvero che $A^{\mathsf{T}}(A\hat{x} - b) = 0$.)

`Problema 2`

Sia $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ definita da

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + (x_1 - x_2 + x_3 - 1)^2 + (x_1 - 4x_2 - 2)^2$$

Dopo aver determinato $A \in \mathbf{R}^{5\times 3}$ e $b \in \mathbf{R}^5$ tali che per ogni $x \in \mathbf{R}^3$ si abbia

$$F(x) = ||Ax - b||_2^2$$

si determini per quale $\hat{x} \in \mathbf{R}^3$ la funzione $F$ assume valore minimo.

`Problema 3`

Determinare l'elemento di $\langle 1, t\rangle$ che meglio approssima i dati

$$(-2, 0) \quad , \quad (-1, 1) \quad , \quad (0, 1) \quad , \quad (1, -1) \quad , \quad (2, 0)$$

nel senso dei minimi quadrati.

`Problema 4`

Siano

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Determinare una fattorizzazione QR di $A$ ed utilizzarla per risolvere il sistema $Ax = b$ nel senso dei minimi quadrati.

`Problema 5`

In un piano cartesiano si considerino i punti

$$P_1 = (1, 1) \quad , \quad P_2 = (2, 1) \quad , \quad P_3 = (0, 1) \quad , \quad P_4 = (2, 1)$$

Determinare le coordinate del punto $P$ che rende minima la quantità

$$d(P, P_1)^2 + d(P, P_2)^2 + d(P, P_3)^2 + 4\, d(P, P_4)^2$$