



**Problemi di Calcolo Numerico**  
**Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni**

a.a. 2008/2009

**1 Funzionalità matematiche del calcolatore  
e teoria degli errori**

**Problema 1**

Determinare l'esponente e la frazione di  $x = \frac{2}{5}$  in base  $\beta = 3$ .

**Problema 2**

Sia  $M = F(2, 3)$ . Indicare quali dei seguenti numeri appartengono ad  $M$  :

$$x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = \frac{1}{3} \quad , \quad x_3 = \frac{1}{16} \quad , \quad x_4 = \frac{3}{16}$$

**Problema 3**

Sia  $M = F(10, 3)$ . Determinare il numero di elementi dell'insieme

$$\{ \xi \in M \text{ tali che } -10^{-6} 0.311 \leq \xi \leq -10^{-9} 0.581 \}$$

**Problema 4**

Siano  $M_2$  un insieme di numeri in virgola mobile e base 2 e  $M_{10}$  un insieme di numeri in virgola mobile e base 10.

- (a) Mostrare che  $\frac{1}{10} \in M_{10}$  ma  $\frac{1}{10} \notin M_2$ , e dedurre che sono falsi gli asserti  $M_2 \supset M_{10}$  e  $M_2 = M_{10}$ .
- (b) Mostrare che *per ogni intero positivo  $k$ ,  $2^k$  non è divisibile per 10* (e quindi che la cifra delle unità dell'espansione decimale di  $2^k$  è sempre non zero) e che *per ogni intero positivo  $n$  esiste  $k$  tale che  $2^k > 10^n$* ; questi due asserti provano che per  $k$  sufficientemente grande si ha  $2^k \notin M_{10}$ , e quindi che è falso anche l'asserto  $M_2 \subset M_{10}$ .

**Problema 5**

Sia  $M = F(\beta, m)$  e siano  $\phi, \psi : M \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$  le funzioni definite da

$$\phi(\xi) = \text{esponente di } \xi \quad , \quad \psi(\xi) = \text{frazione di } \xi$$

Mostrare che per ogni  $\xi \in M$  si ha  $\psi(\xi) \in M$ , ma che  $\phi$  non ha la stessa proprietà. Per ciascuna di tali funzioni, decidere se è monotona.

**Problema 6**

Sia  $M = F(\beta, m)$  e sia  $\phi : M \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$  la funzione definita da  $\phi(\xi) = \sigma(\xi) - \xi$ . Mostrare che per ogni  $\xi \in M$  si ha  $\phi(\xi) \in M$  e decidere se  $\phi$  è monotona.

**Problema 7**

Sia  $M = F(2, 4)$ . Posto  $\xi = 2^{-3} 0.1101 \in M$ , indicare per quali interi  $n$  si ha  $4^n \xi \in M$ .

**Problema 8**

Sia  $M = F(3, 2)$ . Calcolare  $\text{rd}(\frac{1}{4})$ .

**Problema 9**

Sia  $M = F(10, 3)$ . Calcolare  $\delta(\frac{1}{27})$ .

**Problema 10**

Sia  $M = F(2, 4)$ . Decidere se

- (a) per ogni  $\xi \in M$  si ha  $4 \times \xi \in M$
- (b) per ogni  $\xi \in M$  si ha  $\xi/4 \in M$
- (c) per ogni  $\xi \in M$  si ha  $\xi + 4 \in M$

**Problema 11**

Sia  $M = F(2, 4)$ . Mostrare che tutti gli elementi positivi di  $M$  con esponente maggiore o uguale a 4 sono interi, e poi determinare il massimo dell'insieme

$$\{\xi \in M \text{ tali che } \xi > 0 \text{ e } \xi \notin \mathbf{Z}\}$$

**Problema 12**

Sia  $M = F(\beta, m)$ . Decidere se per ogni  $\xi \in M$  si ha

$$\xi \otimes \xi > 1 \Rightarrow \xi^2 > 1$$

**Problema 13**

Sia  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  la funzione definita da  $f(x) = x^2 - x$ . Determinare la funzione di condizionamento per il problema del calcolo di  $f$  in  $x$  che esprime l'errore relativo trasmesso dai dati in termini di  $x$  e dell'errore relativo sul dato.

**Problema 14**

Siano  $M = F(\beta, m)$ ,  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  la funzione definita da  $f(x) = x(x - 1)$  e  $\phi : M \rightarrow M$  la funzione definita da  $\phi(\xi) = \xi \otimes (\xi \ominus 1)$ . Stimare l'errore algoritmico  $\epsilon_a$  (commesso utilizzando  $\phi$  per approssimare  $f$  in  $\xi$ ) in termini di  $\xi$  ed  $u$ .

**Problema 15**

Sia  $M = F(10, 2)$ . Determinare l'insieme  $\{\xi \in M \text{ tali che } 0.31 \otimes \xi = 0.31\}$ .

**Problema 16**

Siano  $M = F(\beta, m)$  e  $\mathbf{SEN} : M \rightarrow M$  la funzione definita da  $\mathbf{SEN}(\xi) = \text{rd}(\text{sen } \xi)$ . Si utilizza la funzione  $\phi(\xi) = \mathbf{SEN}(\xi) \oslash \xi$  per approssimare la funzione  $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$ . Stimare l'errore algoritmico  $\epsilon_a$  in termini di  $\xi$  ed  $u$ .

**Problema 17**

Siano  $f$  la funzione definita, per  $x \in \mathbf{R}$ , da  $f(x) = e^{-x}$  e  $\mathbf{EXP}$  la funzione definita, per  $\xi \in M$  da  $\mathbf{EXP}(\xi) = \text{rd}(e^\xi)$ . Posto  $\phi(\xi) = 1 \oslash \mathbf{EXP}(\xi)$ , stimare l'errore algoritmico  $\epsilon_a$  (commesso utilizzando  $\phi$  per approssimare  $f$  in  $\xi$ ) in termini di  $\xi$  ed  $u$ .

**Problema 18**

Indicare l'errore relativo che si commette approssimando

$$10 \text{ con } 20 \quad , \quad 5 \cdot 10^{-6} \text{ con } 10^{-5} \quad , \quad 1 \text{ con } 2$$

**Problema 19**

Sia  $M = F(\beta, m)$  un insieme di numeri di macchina. Per ciascuno dei seguenti asserti decidere se è vero o falso:

- (1) l'errore relativo commesso approssimando  $x \in \mathbf{R}$  con  $\text{rd}(x)$  è minore o uguale ad  $u$ ;
- (2) l'errore assoluto commesso approssimando  $x \in \mathbf{R}$  con  $\text{rd}(x)$  è minore o uguale ad  $1$ ;
- (3) se  $\xi \in M$ , anche  $\beta^2 \xi \in M$ ;
- (4) se  $x \in \mathbf{R}$  e  $\text{rd}(x) = 0$ , allora  $x = 0$ ;
- (5) gli intervalli  $[\beta, \beta^2]$  e  $[\beta^{10}, \beta^{11}]$  contengono lo stesso numero di elementi di  $M$ .

**Problema 20**

Siano  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione e

$$F(x, \epsilon) = 3\epsilon x - 6\epsilon^2$$

la funzione di condizionamento per il problema del calcolo di  $f$  in  $x$ , che esprime l'errore relativo trasmesso dal dato in funzione del dato  $x$  e dell'errore relativo  $\epsilon$  sul dato.

Calcolare

$$\frac{f(6) - f(3)}{f(3)}$$

**Problema 21**

Sia  $M = F(10, 2)$ . Calcolare  $\text{rd}(2^{-3}0.1011)$ .

**Problema 22**

Determinare tutti gli elementi di  $\mathbf{R}$  che approssimano 7 con errore relativo inferiore a  $\frac{1}{10}$  in valore assoluto.