



Problemi di Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

a.a. 2008/2009

1 Funzionalità matematiche del calcolatore e teoria degli errori

Problema 1

Determinare l'esponente e la frazione di $x = \frac{2}{5}$ in base $\beta = 3$.

Problema 2

Sia $M = F(2, 3)$. Indicare quali dei seguenti numeri appartengono ad M :

$$x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = \frac{1}{3} \quad , \quad x_3 = \frac{1}{16} \quad , \quad x_4 = \frac{3}{16}$$

Problema 3

Sia $M = F(10, 3)$. Determinare il numero di elementi dell'insieme

$$\{ \xi \in M \text{ tali che } -10^{-6} \cdot 0.311 \leq \xi \leq -10^{-9} \cdot 0.581 \}$$

Problema 4

Siano M_2 un insieme di numeri in virgola mobile e base 2 e M_{10} un insieme di numeri in virgola mobile e base 10.

- Mostrare che $\frac{1}{10} \in M_{10}$ ma $\frac{1}{10} \notin M_2$, e dedurre che sono falsi gli asserti $M_2 \supset M_{10}$ e $M_2 = M_{10}$.
- Mostrare che *per ogni intero positivo* k , 2^k *non è divisibile per* 10 (e quindi che la cifra delle unità dell'espansione decimale di 2^k è sempre non zero) e che *per ogni intero positivo* n *esiste* k *tale che* $2^k > 10^n$; questi due asserti provano che per k sufficientemente grande si ha $2^k \notin M_{10}$, e quindi che è falso anche l'asserto $M_2 \subset M_{10}$.

Problema 5

Sia $M = F(\beta, m)$ e siano $\phi, \psi : M \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$ le funzioni definite da

$$\phi(\xi) = \text{esponente di } \xi \quad , \quad \psi(\xi) = \text{frazione di } \xi$$

Mostrare che per ogni $\xi \in M$ si ha $\psi(\xi) \in M$, ma che ϕ non ha la stessa proprietà. Per ciascuna di tali funzioni, decidere se è monotona.

Problema 6

Sia $M = F(\beta, m)$ e sia $\phi : M \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$ la funzione definita da $\phi(\xi) = \sigma(\xi) - \xi$. Mostrare che per ogni $\xi \in M$ si ha $\phi(\xi) \in M$ e decidere se ϕ è monotona.

Problema 7

Sia $M = F(2, 4)$. Posto $\xi = 2^{-3} 0.1101 \in M$, indicare per quali interi n si ha $4^n \xi \in M$.

Problema 8

Sia $M = F(3, 2)$. Calcolare $\text{rd}(\frac{1}{4})$.

Problema 9

Sia $M = F(10, 3)$. Calcolare $\delta(\frac{1}{27})$.

Problema 10

Sia $M = F(2, 4)$. Decidere se

- (a) per ogni $\xi \in M$ si ha $4 \times \xi \in M$
- (b) per ogni $\xi \in M$ si ha $\xi/4 \in M$
- (c) per ogni $\xi \in M$ si ha $\xi + 4 \in M$

Problema 11

Sia $M = F(2, 4)$. Mostrare che tutti gli elementi positivi di M con esponente maggiore o uguale a 4 sono interi, e poi determinare il massimo dell'insieme

$$\{\xi \in M \text{ tali che } \xi > 0 \text{ e } \xi \notin \mathbf{Z}\}$$

Problema 12

Sia $M = F(\beta, m)$. Decidere se per ogni $\xi \in M$ si ha

$$\xi \otimes \xi > 1 \Rightarrow \xi^2 > 1$$

Problema 13

Sia $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ la funzione definita da $f(x) = x^2 - x$. Determinare la funzione di condizionamento per il problema del calcolo di f in x che esprime l'errore relativo trasmesso dai dati in termini di x e dell'errore relativo sul dato.

Problema 14

Siano $M = F(\beta, m)$, $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ la funzione definita da $f(x) = x(x - 1)$ e $\phi : M \rightarrow M$ la funzione definita da $\phi(\xi) = \xi \otimes (\xi \ominus 1)$. Stimare l'errore algoritmico ϵ_a (commesso utilizzando ϕ per approssimare f in ξ) in termini di ξ ed u .

Problema 15

Sia $M = F(10, 2)$. Determinare l'insieme $\{\xi \in M \text{ tali che } 0.31 \otimes \xi = 0.31\}$.

Problema 16

Siano $M = F(\beta, m)$ e $\mathbf{SEN} : M \rightarrow M$ la funzione definita da $\mathbf{SEN}(\xi) = \text{rd}(\text{sen } \xi)$. Si utilizza la funzione $\phi(\xi) = \mathbf{SEN}(\xi) \odot \xi$ per approssimare la funzione $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$. Stimare l'errore algoritmico ϵ_a in termini di ξ ed u .

Problema 17

Siano f la funzione definita, per $x \in \mathbf{R}$, da $f(x) = e^{-x}$ e \mathbf{EXP} la funzione definita, per $\xi \in M$ da $\mathbf{EXP}(\xi) = \text{rd}(e^\xi)$. Posto $\phi(\xi) = 1 \odot \mathbf{EXP}(\xi)$, stimare l'errore algoritmico ϵ_a (commesso utilizzando ϕ per approssimare f in ξ) in termini di ξ ed u .

Problema 18

Indicare l'errore relativo che si commette approssimando

$$10 \text{ con } 20 \quad , \quad 5 \cdot 10^{-6} \text{ con } 10^{-5} \quad , \quad 1 \text{ con } 2$$

Problema 19

Sia $M = F(\beta, m)$ un insieme di numeri di macchina. Per ciascuno dei seguenti asserti decidere se è vero o falso:

- (1) l'errore relativo commesso approssimando $x \in \mathbf{R}$ con $\text{rd}(x)$ è minore o uguale ad u ;
- (2) l'errore assoluto commesso approssimando $x \in \mathbf{R}$ con $\text{rd}(x)$ è minore o uguale ad 1;
- (3) se $\xi \in M$, anche $\beta^2 \xi \in M$;
- (4) se $x \in \mathbf{R}$ e $\text{rd}(x) = 0$, allora $x = 0$;
- (5) gli intervalli $[\beta, \beta^2]$ e $[\beta^{10}, \beta^{11}]$ contengono lo stesso numero di elementi di M .

Problema 20

Siano $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione e

$$F(x, \epsilon) = 3\epsilon x - 6\epsilon^2$$

la funzione di condizionamento per il problema del calcolo di f in x , che esprime l'errore relativo trasmesso dal dato in funzione del dato x e dell'errore relativo ϵ sul dato.

Calcolare

$$\frac{f(6) - f(3)}{f(3)}$$

Problema 21

Sia $M = F(10, 2)$. Calcolare $\text{rd}(2^{-3}0.1011)$.

Problema 22

Determinare tutti gli elementi di \mathbf{R} che approssimano 7 con errore relativo inferiore a $\frac{1}{10}$ in valore assoluto.