

(1.09) Osservazione.

Il *costrutto Scilab*

```
while condizione,
    istruzioni;
end;
```

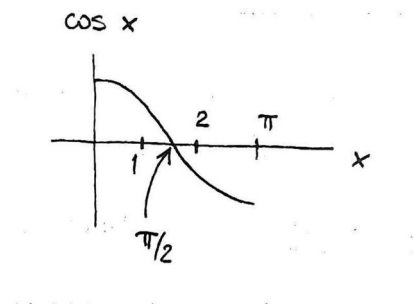
è equivalente a:

```
ripeti:
    se condizione è vera allora istruzioni;
    altrimenti esci dal ciclo;
```

(1.10) Esempio

Sia $f(x) = \cos(x)$.

- La funzione è continua in $[a,b] = [1,2]$ e $f(a) > 0$, $f(b) < 0$
- Scelto $E > 0$ si ha:



$$\begin{aligned} \text{mis } I(k) < E &\Leftrightarrow \text{mis } I(0) / 2^k < E \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2^k > \text{mis } I(0) / E \Leftrightarrow k > \log_2(\text{mis } I(0) / E) \end{aligned}$$

dunque: ci aspettiamo di ottenere un'approssimazione di $\pi/2$ con errore assoluto minore di E in

$$VA = \text{parte intera superiore di } \log_2(\text{mis } I(0) / E)$$

iterazioni.

Attenzione: il numero di iterazioni atteso *aumenta al diminuire di E .*

- Si ottiene (utilizzando il file EsempioBisezione.sce scaricabile dalla sezione 'altro materiale didattico' della pagina web del corso):

E	info	mis	k	VA	kmax
10^{-5}	1	$7.6 \cdot 10^{-6}$	17	17	50
10^{-10}	1	$5.8 \cdot 10^{-11}$	34	34	50
10^{-15}	1	$8.9 \cdot 10^{-16}$	50	50	50
10^{-16}	2	$8.9 \cdot 10^{-16}$	50	54	50
10^{-16}	2	$2.2 \cdot 10^{-16}$	100	54	100

Dalle ultime due righe della tabella si osserva che quando $E = 10^{-16}$ la funzione *bisezione* si arresta perché ha raggiunto il numero massimo di iterazioni consentito ma, mentre nel primo caso (penultima riga) questo è *coerente* con le teoria, nel secondo caso (ultima riga) *non è coerente* con la teoria: la procedura *avrebbe dovuto arrestarsi dopo 54 iterazioni con info* = 1.

Per capire come mai accade questo, occorre studiare in maggior dettaglio l'ARITMETICA DEL CALCOLATORE.

(1.11) Domande.

- (A) Con *quali numeri* è capace di operare il calcolatore?
- (B) *Cosa sa fare* con questi numeri?

(1.12) Osservazione.

Siano x un numero reale *non zero*, β un numero intero maggiore o uguale a due (*base*). Esiste *una sola* fattorizzazione di x nella forma:

$$x = (-1)^s \beta^b g$$

con:

- s in $\{0,1\}$, *segno* di x
- b : numero intero, *esponente* di x in base β
- g : numero reale in $[1/\beta, 1)$, *frazione* di x in base β

(Dimostrazione:

- se $x > 0$ allora $s = 0$, se $x < 0$ allora $s = 1$;
- b è l'*unico* numero intero tale che

$$\beta^{b-1} < |x| \leq \beta^b$$

- $g = |x| / \beta^b$

(1.13) Esempio.

- (1) $x = \sqrt{5}$, $\beta = 10 \Rightarrow s = 0, b = 1, g = \sqrt{5} / 10$
- (2) $x = \sqrt{5}$, $\beta = 2 \Rightarrow s = 0, b = 2, g = \sqrt{5} / 4$

(1.14) Osservazione.

La condizione g numero reale in $[1/\beta, 1)$ si traduce così: la scrittura posizionale di g in base β ha la forma:

$$0.c_1c_2c_3\dots \text{ con } c_1 \text{ diverso da zero}$$

In particolare: se $\beta = 2$ si ha necessariamente $c_1 = 1$.

(1.15) Esempio.

- (1) $x = 1/10$, $\beta = 10 \Rightarrow s = 0, b = 0, g = 1/10 = 0.1$
- (2) $x = 1/10$, $\beta = 2 \Rightarrow s = 0, b = -3, g = 8/10 = 4/5 = 0.\overline{1100}$

(Ragionamento¹:

(1)

- * $4/5 = 0.c_1c_2c_3... \Rightarrow 8/5 = c_1.c_2c_3... \text{ e quindi:}$
- * $[8/5] = [c_1.c_2c_3...] \text{ e } \{8/5\} = \{c_1.c_2c_3...\} \text{ ovvero:}$
- * $c_1 = 1 \text{ e } 3/5 = 0.c_2c_3c_4...$

(2)

- * $3/5 = 0.c_2c_3c_4... \Rightarrow 6/5 = c_2.c_3c_4... \text{ e quindi:}$
- * $[6/5] = [c_2.c_3c_4...] \text{ e } \{6/5\} = \{c_2.c_3c_4...\} \text{ ovvero:}$
- * $c_2 = 1 \text{ e } 1/5 = 0.c_3c_4c_5...$

(3)

- * $1/5 = 0.c_3c_4c_5... \Rightarrow 2/5 = c_3.c_4c_5... \text{ e quindi:}$
- * $[2/5] = [c_3.c_4c_5...] \text{ e } \{2/5\} = \{c_3.c_4c_5...\} \text{ ovvero:}$
- * $c_3 = 0 \text{ e } 2/5 = 0.c_4c_5c_6...$

(4)

- * $2/5 = 0.c_4c_5c_6... \Rightarrow 4/5 = c_4.c_5c_6... \text{ e quindi:}$
- * $[4/5] = [c_4.c_5c_6...] \text{ e } \{4/5\} = \{c_4.c_5c_6...\} \text{ ovvero:}$
- * $c_4 = 0 \text{ e } 4/5 = 0.c_5c_6c_7...$

Si osserva adesso che si è ottenuta una nuova scrittura del numero iniziale $4/5$. Se ne deduce che $4/5$ ha scrittura periodica di periodo quattro.

Fine del ragionamento.)

Si osservi che in entrambi gli esempi si ha $x = 1/10$ ma nell'esempio (1) la frazione ha scrittura posizionale di *lunghezza finita*, nell'esempio (2) ha *lunghezza infinita*. La lunghezza della scrittura posizionale dipende dalla base.

¹ Se q è un numero reale, con $[q]$ si indica la *parte intera* di q e con $\{q\}$ la *parte frazionaria* di q , ovvero $\{q\} = q - [q]$.