

(1) ZERI DI FUNZIONI E ARITMETICA DEL CALCOLATORE

(1.01) Problema.

Data $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e tale che esiste α in $[a,b]$ zero di f , determinare α .¹

(1.02) Teorema (di esistenza degli zeri)

Sia $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e t.c. $f(a)f(b) < 0$. Allora: esiste α in (a,b) t.c. $f(\alpha) = 0$.

(Cosa succede se f non è continua o $f(a)f(b) \geq 0$?)

(1.03) Osservazione.

La condizione $f(a)f(b) < 0$ è equivalente alla condizione:

$f(a)$ non è zero & $f(b)$ non è zero & segno $f(a)$ diverso da segno $f(b)$

(1.04) Metodo di bisezione.

Idea: utilizzare il Teorema di esistenza degli zeri per ottenere una successione di intervalli $I(k) = [a(k), b(k)]$ tale che:

- per ogni k , esiste almeno uno zero di f in $I(k)$
- $I(k+1)$ incluso in $I(k)$
- quando $k \rightarrow \infty$ si ha $\text{mis } I(k) \rightarrow 0$

(1.05) Descrizione del metodo.

$z = \text{Bisezione}(f, a, b)$

ingresso: $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $f(a)f(b) < 0$

- $a(0) = a$; $b(0) = b$; $I(0) = [a(0), b(0)]$; $x(0) = (a(0) + b(0)) / 2$;
- per $k = 1, 2, 3, \dots$ ripeti:
 - se $f(x(k-1)) = 0$ allora STOP; altrimenti
 - se $f(x(k-1))f(b(k-1)) < 0$ allora $a(k) = x(k-1)$; $b(k) = b(k-1)$;
 - altrimenti $a(k) = a(k-1)$; $b(k) = x(k-1)$;
 - $I(k) = [a(k), b(k)]$; $x(k) = (a(k) + b(k)) / 2$;

uscita: quando un opportuno *criterio d'arresto* è verificato: $z = x(k)$, punto medio dell'ultimo intervallo determinato.

1) α in $[a,b]$ è zero di f significa che $f(\alpha) = 0$.

(1.06) Osservazione.

(A) $\text{mis } I(k) = b(k) - a(k) = \text{mis } I(k-1) / 2^1 = \text{mis } I(k-2) / 2^2 = \dots = \text{mis } I(0) / 2^k$ e
quindi:

quando $k \rightarrow \infty$ si ha $\text{mis } I(k) \rightarrow 0$