Lezione 34 (ore 68,69) - 11 dicembre 2025, 8:30 - 10:30 F3

In questa lezione svolgiamo alcuni esercizi.

Esercizio 1

Sia:

$$F(x) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 - 1 \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 \end{bmatrix} : R^2 \to R^2$$

(1) Determinare graficamente gli zeri di F;
(2) Posto G(x) = x - F(x), verificare che gli zeri di F sono tutti e soli i punti uniti di G;
(3) Decidere se il metodo ad un punto definito da G sia utilizzabile per approssimare gli zeri di F;
(4) Dato $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, determinare l'elemento x(1) ottenuto utilizzando un passo del metodo di Newton applicato ad F;
(5) Decidere se il metodo di Newton applicato ad F sia utilizzabile per approssimare gli zeri di F.

Soluzione.

(1) Posto:

$$F_1(x) = x_1 - x_2 - 1 \quad \text{e} \quad F_2(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1$$

l'equazione F(x) = 0 è equivalente al sistema:

$$F_1(x) = 0 \quad \text{e} \quad F_2(x) = 0$$

L'insieme degli zeri di $F_1$ è la retta di equazione $x_2 = x_1 - 1$; l'insieme degli zeri di $F_2$ è la circonferenza di equazione $x_1^2 + x_2^2 = 1$, di centro l'origine e raggio 1. Rappresentando graficamente i due insiemi in un piano cartesiano si determinano i *due* zeri di F:

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(2) L'equazione x = G(x) si riscrive: x = x + F(x), e quest'ultima è equivalente all'equazione F(x) = 0. Dunque Le equazioni x = G(x) e F(x) = 0 sono equivalenti ossia *hanno le stesse soluzioni*. Le soluzioni della prima sono i *punti uniti di* G, quelle della seconda sono gli *zeri di* F.

(3) Per quanto detto nella Lezione 14, il metodo definito da G è utilizzabile per approssimare il punto unito $\alpha_k$ se e solo se il *raggio spettrale*[1] della matrice jacobiana di G calcolata in $\alpha_k$, $J_G(\alpha_k)$, è minore di 1. La matrice jacobiana di G è:

1 Si veda la Definizione (2.65) nella Lezione 22.

$$J_G(x) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2x_1 & 2x_2+1 \end{bmatrix}$$

Per $\alpha_1$ si ha:

$$J_G(\alpha_1) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico è:

$$\det(J_G(\alpha_1) - \lambda I) = (2 - \lambda)(1 - \lambda) + 2 = \lambda^2 - 3\lambda + 4$$

e gli autovalori sono:

$$\lambda_1 = \frac{3 + i\sqrt{7}}{2} \qquad \text{e} \qquad \lambda_2 = \frac{3 - i\sqrt{7}}{2}$$

Allora: $\rho(J_G(\alpha_1)) > 1$ e il metodo definito da G *non è utilizzabile* per approssimare $\alpha_1$.

Per $\alpha_2$ si ha:

$$J_G(\alpha_1) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Gli autovalori sono:

$$\lambda_1 = 2 \qquad \text{e} \qquad \lambda_2 = -1$$

Di nuovo: $\rho(J_G(\alpha_2)) > 1$ e il metodo definito da G *non è utilizzabile* neppure per approssimare $\alpha_2$.

(4) Il metodo di Newton applicato ad F è il metodo ad un punto definito dalla funzione:

$$N(x) = x - J_F(x)^{-1} F(x) \ : R^2 \to R^2$$

Si ha:

$$J_F(x) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad J_F(x(0)) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

La matrice $J_F(x(0))$ è invertibile, dunque $x(1)$ è definito e si ha:

$$x(1) = N(x(0)) \qquad \text{ovvero} \qquad x(1) = x(0) - J_F(x(0))^{-1} F(x(0))$$

Detta v la soluzione del sistema $J_F(x(0))\, z = F(x(0))$, si riscrive:

$$x(1) = x(0) - v$$

Si ha:

$$v = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e infine:} \qquad x(1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(5) Per quanto detto nell'Osservazione (1.90) della Lezione 14, condizione *sufficiente* per l'utilizzabilità del metodo di Newton per approssimare lo zero $\alpha_k$ di F è che: F abbia derivare (parziali) seconde continue in un intorno di $\alpha_k$ e $J_F(\alpha_k)$ sia invertibile. Nel caso in esame le funzioni $F_1$ ed $F_2$ hanno derivate parziali di ogni ordine su $R^2$ e sia $J_F(\alpha_1)$ che $J_F(\alpha_2)$ sono invertibili. Il metodo di Newton risulta quindi utilizzabile per approssimare entrambi gli zeri di F.

Esercizio 2

Siano:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & & 1 \\ 1 & 4 & & \\ & & 2 & \\ 1 & & & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

(1) Decidere se la matrice A è a predominanza diagonale forte per righe;
(2) Determinare la matrice $H_J$ e la colonna $c_J$ che definiscono il metodo di Jacobi applicato al sistema $A\,x = b$;
(3) Determinare lo spettro ed il raggio spettrale di $H_J$;
(4) Determinare $\| H_J \|_\infty$;
(5) Decidere se il metodo di Jacobi è convergente;
(6) Dato $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, determinare l'elemento x(1) ottenuto utilizzando un passo del metodo di Jacobi.

Soluzione.

(1) Per tutte le righe di A il valore assoluto dell'elemento sulla diagonale è maggiore della somma dei valori assoluti dei restanti elementi della riga. Quindi la matrice *è* a predominanza diagonale forte per righe.
(2) Posto: $A = D + M$ con:

$$D = \mathrm{diag}(A) = \begin{bmatrix} 4 & & & \\ & 4 & & \\ & & 2 & \\ & & & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M = A - D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 1 \\ 1 & 0 & & \\ & & 0 & \\ 1 & & & 0 \end{bmatrix}$$

si ha:

$$H_J = -D^{-1} M = - \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & & 1/4 \\ 1/4 & 0 & & \\ & & 0 & \\ 1/4 & & & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad c_J = D^{-1} b = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 0 \\ 0 \\ 1/4 \end{bmatrix}$$

(3) Il polinomio caratteristico di $H_J$ è:

$$\det(H_J - \lambda I) = \lambda^2 (\lambda^2 - 1/8)$$

dunque:

$$\sigma(H_J) = \{ 0, 0, 1/\sqrt{8}, -1/\sqrt{8} \} \quad \text{e} \quad \rho(H_J) = 1/\sqrt{8}$$

(4) La norma infinito di $H_J$ è, usando la formula di calcolo riportata nell'Osservazione (2.32) della Lezione 18:

$$\| H_J \|_\infty = \max\{ 1/2, 1/4, 0, 1/4 \} = 1/2$$

(5) Per decidere se in questo caso il metodo di Jacobi è convergente si può usare il Teorema di caratterizzazione dei metodi convergenti (Teorema (2.66) della Lezione 22). Dal risultato del punto (3) si ha: $\rho(H_J) = 1/\sqrt{8} < 1$, dunque *il metodo è*

*convergente*.

Allo stesso risultato si poteva arrivare utilizzando il Teorema (2.72) della Lezione 23: la predominanza diagonale forte per righe di A (stabilita al punto (1)) è una *condizione sufficiente* per la convergenza del metodo di Jacobi. Alternativamente, per il Teorema (2.73) della Lezione 23, $\| H_J \|_\infty < 1$ è una *condizione sufficiente* per avere $\rho(H_J) < 1$ e quindi la convergenza del metodo di Jacobi. Il calcolo di $\rho(H_J)$, che è in generale difficile da fare, non solo consente di decidere *con certezza* della convergenza del metodo (le due condizioni richiamate sopra sono *solo sufficienti*: se non sono verificate...) ma, nel caso in cui il metodo risulti convergente, fornisce anche informazioni sulla *rapidità di convergenza* (Teorema (2.81) della Lezione 23).

(6) Si ha:

$$x(1) = H_J\, x(0) + c_J = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

<u>Esercizio 3</u>

Si consideri l'equazione differenziale:

$$y''(t) = y(t) + (y'(t))^2 + \operatorname{sen} t$$

(1) Determinare un sistema di equazioni di ordine uno equivalente all'equazione data;
(2) Determinare la funzione $G_2(t,x)$ che restituisce il valore della derivata seconda della soluzione del sistema che all'istante t passa per x;
(3) Dati x(k), t(k) ed h(k), determinare x(k+1) con il metodo TS(1).

<u>Soluzione</u>.

(1) Posto $x_1(t) = y(t)$ e $x_2(t) = y'(t)$, un sistema di equazioni di ordine uno equivalente all'equazione data è:

$$x_1'(t) = x_2(t) \quad , \quad x_2'(t) = x_1(t) + (x_2(t))^2 + \operatorname{sen} t \qquad (\#)$$

(2) Se $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ è una soluzione del sistema (#) allora:

$$x_1''(t) = x_2'(t) = x_1(t) + (x_2(t))^2 + \operatorname{sen} t$$

e:

$$x_2''(t) = x_1'(t) + 2\, x_2(t)\, x_2'(t) + \cos t =$$
$$= x_2(t) + 2\, x_2(t)\, [x_1(t) + (x_2(t))^2 + \operatorname{sen} t] + \cos t$$

quindi:

$$G_2(t,x) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2^2 + \operatorname{sen} t \\ x_2 + 2\, x_1 x_2 + 2\, x_2^3 + 2\, x_2 \operatorname{sen} t + \cos t \end{bmatrix}$$

(3) L'approssimazione x(k+1) con TS(1) è:

$$x(k+1) = x(k) + F(t(k),x(k))\,h(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) + x_2(k)\,h(k) \\ x_2(k) + [x_1(k) + (x_2(k))^2 + \text{sen}\,t(k)]\,h(k) \end{bmatrix}$$

<u>Esercizio 4</u>

Per approssimare il grafico della funzione:

$$f(x) = \text{sen}\,3x$$

sull'intervallo [a,b] = [0,5], in *Scilab* si utilizzano i seguenti comandi:

```
> x = linspace(0,5,n + 1)';
> plot(x,f(x));
```

L'effetto è quello di disegnare, in un piano cartesiano, il grafico della funzione $\sigma_n(x)$ continua e lineare a tratti sugli intervalli determinati dai punti $x(1),...,x(n + 1)$ che interpola i valori di f in $x(1),...,x(n + 1)$.

Determinare un valore di $n$ in modo che:

$$e_n(f) = \max_{x\in[0,5]} |\sigma_n(x) - f(x)| \leqslant 10^{-2}$$

<u>Soluzione</u>.

La funzione f ha derivata seconda continua: $f''(x) = -9\,\text{sen}\,3x$. Per ogni $x \in [x(k),x(k+1)]$ si ha allora (usando il Teorema (3.11) della Lezione 25):

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{M_2}{2}|x - x(k)||x - x(k+1)| \quad \text{con} \quad M_2 = \max_{x\in[0,5]}|f''(x)| = 9$$

e quindi:

$$\max_{x\in[x(k),x(k+1)]}|\sigma_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{M_2}{2} \max_{x\in[x(k),x(k+1)]}|x - x(k)||x - x(k+1)|$$

Inoltre:

$$\max_{x\in[x(k),x(k+1)]}|x - x(k)||x - x(k+1)| = \left(\frac{x(k+1) - x(k)}{2}\right)^2$$

perciò:

$$\max_{x\in[x(k),x(k+1)]}|\sigma_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{M_2}{8}[\,x(k+1) - x(k)\,]^2 = \frac{M_2}{8}\left(\frac{b - a}{n}\right)^2$$

Si ottiene infine:

$$e_n(f) = \max_{x\in[0,5]}|\sigma_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{M_2}{8}\left(\frac{b - a}{n}\right)^2$$

Per ottenere $e_n(f) \leqslant 10^{-2}$ basta che sia:

$$\frac{M_2}{8}\left(\frac{b - a}{n}\right)^2 \leqslant 10^{-2} \qquad \text{ovvero} \qquad n \geqslant 10\sqrt{\frac{M_2}{8}}\,(b - a) = 53.03\cdots$$

Dunque $n \geqslant 54$.