Lezione 32 (ore 64,65) - 9 dicembre 2025, 16:30 - 18:30 F3

(4.C) METODI RUNGE-KUTTA

(4.21) Esempio.

Nel metodo TS(2) è richiesta all'utilizzatore la determinazione e realizzazione delle funzioni:

$$G_2(t,x) \quad \text{per il calcolo di } x(k+1)$$

e:

$$G_3(t,x) \quad \text{per la scelta di } h(k)$$

In generale il compito è tanto più gravoso quanto più alto è l'ordine del metodo: nel metodo TS(p) l'utilizzatore deve determinare e realizzare le funzioni:

$$G_2(t,x),\dots,G_p(t,x) \quad \text{per il calcolo di } x(k+1)$$

e:

$$G_{p+1}(t,x) \quad \text{per la scelta di } h(k)$$

I *metodi Runge-Kutta* sono pensati per eliminare questo onere.

Per introdurre la *struttura* dei metodi, vediamo come si trasforma il calcolo di x(k+1) nel metodo TS(2) utilizzando una stima numerica del valore $G_2(t,x)$.

(4.22) Osservazione (stima numerica di G_2)

Il valore $G_2(t(k),x(k)) = y''(t(k))$ può essere *stimato* con le considerazioni seguenti:

(a) Per definizione:

$$\frac{y'(t(k)+\tau) - y'(t(k))}{\tau} \to y''(t(k)) \quad \text{per} \quad \tau \to 0$$

dunque:

$$\textit{per } \tau \textit{ piccolo } \frac{y'(t(k)+\tau) - y'(t(k))}{\tau} \textit{ è una buona approssimazione di } y''(t(k))$$

(b) Poiché y(t) è la soluzione dell'equazione differenziale che vale x(k) all'istante t(k) si ha:

$$y'(t(k)) = F(\ t(k),y(t(k))\ ) = F(\ t(k),x(k)\ )$$

e:

$$y'(t(k)+\tau) = F(\ t(k)+\tau\ ,\ y(t(k)+\tau)\ )$$

Quest'ultimo valore *non è calcolabile* perché, assegnato τ, la procedura non conosce

$y(t(k) + \tau)$. Allora:

si approssima $y(t(k) + \tau)$ *con* $y(t(k)) + y'(t(k))\ \tau = x(k) + F(\ t(k),x(k)\ )\ \tau$

Complessivamente:

scelto τ *piccolo, si stima* $G_2(t(k),x(k)) = y''(t(k))$ *con*

$$\frac{F(\ t(k) + \tau\ ,\ x(k) + F(\ t(k),x(k)\ )\ \tau\ ) - F(\ t(k),x(k)\ )}{\tau}$$

Questa quantità, dato τ, *è calcolabile senza usare* G_2.

La stima è *ragionevole*. Infatti, indicando con $F(k)$ il valore $F(\ t(k),x(k)\ )$, si consideri la funzione di τ:

$$H(\tau) = F(\ t(k) + \tau\ ,\ x(k) + F(k)\ \tau\ )$$

Poiché si suppone che $F(t,x)$ abbia *derivate parziali prime* continue, anche H ha derivata prima continua. Allora:

$$H(\tau) = H(0) + H'(0)\ \tau + z(\tau)\ \tau \quad \text{con } z(\tau) \to 0 \text{ per } \tau \to 0$$

Ma: $H(0) = F(k)$ e

$$H'(0) = \partial_t F(\ t(k),x(k)\ ) + \partial_x F(\ t(k),x(k)\ ) \cdot F(\ t(k),x(k)\ ) = G_2(\ t(k),x(k)\ ) = y''(t(k))$$

dunque:

$$H(\tau) = F(k) + y''(t(k))\ \tau + z(\tau)\ \tau$$

e:

$$\frac{H(\tau) - F(k)}{\tau} - y''(t(k)) = z(\tau) \to 0 \text{ per } \tau \to 0$$

(4.23) <u>Osservazione</u> (uso della stima numerica).

In TS(2):

$$x(k+1) = x(k) + F(\ t(k),x(k)\ )\ h(k) + \frac{1}{2}\ G_2(\ t(k),x(k)\ )\ h(k)^2$$

Scegliendo $\tau = h(k)$ nella stima dell'Osservazione (4.22) si ottiene:

$$G_2(\ t(k),x(k)\ ) = \frac{F(\ t(k) + h(k)\ ,\ x(k) + F(\ t(k),x(k)\ )\ h(k)\ ) - F(\ t(k),x(k)\ )}{h(k)}$$

da cui (posto $F(k) = F(\ t(k),x(k)\ )$):

$$x(k+1) = x(k) + F(k)\ h(k) + \frac{1}{2}\ [\ F(\ t(k) + h(k)\ ,\ x(k) + F(k)\ h(k)\ ) - F(k)\ ]\ h(k)$$

$$= x(k) + \frac{1}{2}\ [\ F(k) + F(\ t(k) + h(k)\ ,\ x(k) + F(k)\ h(k)\ )\ ]\ h(k)$$

Questa procedura di calcolo di x(k+1) può essere riscritta, in modo più semplicemente generalizzabile, come segue: *il valore* x(k+1) *si ottiene*, dopo aver scelto h(k), *ponendo*:

- $ST_1 = F(\ t(k), x(k)\ )$
- $ST_2 = F(\ t(k) + h(k)\ ,\ x(k) + ST_1\ h(k)\ )$

e poi

$$x(k+1) = x(k) + \frac{1}{2}\ (ST_1 + ST_2)\ h(k)$$

(4.24) <u>Definizione</u> (metodi RK a due e tre stadi).

Si chiamano *metodi Runge-Kutta* (RK) *a due stadi* quelli nei quali, scelti opportunamente numeri reali c_2, a_{21}, b_1 e b_2, il valore x(k+1) si ottiene, dopo aver scelto h(k), ponendo:

- $ST_1 = F(\ t(k), x(k)\ )$
- $ST_2 = F(\ t(k) + c_2\ h(k)\ ,\ x(k) + a_{21}\ ST_1\ h(k)\ )$

e poi

- $x(k+1) = x(k) + (b_1\ ST_1 + b_2\ ST_2)\ h(k)$

Si chiamano *metodi Runge-Kutta* (RK) *a tre stadi* quelli nei quali, scelti opportunamente numeri reali c_2, c_3, a_{21}, a_{31}, a_{32}, b_1, b_2 e b_3, il valore x(k+1) si ottiene, dopo aver scelto h(k), ponendo:

- $ST_1 = F(\ t(k), x(k)\ )$
- $ST_2 = F(\ t(k) + c_2\ h(k)\ ,\ x(k) + a_{21}\ ST_1\ h(k)\ )$
- $ST_3 = F(\ t(k) + c_3\ h(k)\ ,\ x(k) + [\ a_{31}\ ST_1 + a_{32}\ ST_2\ ]\ h(k)\ )$

e poi

- $x(k+1) = x(k) + (b_1\ ST_1 + b_2\ ST_2 + b_3\ ST_3)\ h(k)$

(4.25) <u>Definizione</u> (ordine di un metodo per h → 0)

Sia s(h) la funzione scostamento per il metodo in esame. Il numero intero p si dice *ordine del metodo per* h → 0 se:

$$s^{(m)}(0) = 0 \quad \text{per } m = 0,\dots,p \quad \text{e} \quad s^{(p+1)}(0) \neq 0$$

ovvero se il primo termine dello sviluppo di Taylor di s(h) per h = 0 è quello di ordine p+1:

$$s(h) = \frac{1}{(p+1)!}\ s^{(p+1)}(0)\ h^{p+1} + \dots$$

(4.26) <u>Osservazione</u> (determinazione dei parametri in un metodo Runge-Kutta).

In un metodo Runge-Kutta a più stadi i valori dei *parametri* c_i, a_{ij}, b_i sono determinati (*non univocamente*) dalla condizione che: per *ogni* funzione F che definisce il Problema di

Cauchy, l'ordine del metodo per $h \to 0$, sia il *più elevato possibile*.

(4.27) Esempio.

Si consideri il metodo Runge-Kutta a due stadi. Per ogni k, posto $y(t) = y(t;x(k),t(k))$, si ha:

$$s(h) = x(k) + [b_1\, ST_1 + b_2\, ST_2(h)]\, h - y(t(k) + h)$$

Allora:

$$s^{(1)}(h) = b_1\, ST_1 + b_2\, ST_2'(h)\, h + b_2\, ST_2(h) - F[t(k) + h, y(t(k) + h)]$$

$$s^{(2)}(h) = b_2\, ST_2''(h)\, h + 2\, b_2\, ST_2'(h) - \partial_t F[t(k) + h, y(t(k) + h)] - \\ - F[t(k) + h, y(t(k) + h)] \cdot \partial_t F[t(k) + h, y(t(k) + h)]$$

da cui, essendo $ST_2(0) = ST_1 = F[t(k),x(k)]$:

$$s^{(0)}(0) = s(0) = x(k) - y(t(k)) = 0$$

$$s^{(1)}(0) = (b_1 + b_2 - 1)\, F[t(k),x(k)]$$

$$s^{(2)}(0) = 2\, b_2\, ST_2'(0) - \partial_t F[t(k),x(k)] - F[t(k),x(k)] \cdot \partial_t F[t(k),x(k)]$$

Poi, posto $F[t(k) + c_2\, h\ ,\ x(k) + a_{21}\, ST_1\, h] = F_k(h)$ e quindi $ST_1 = F[t(k),x(k)] = F_k(0)$:

$$ST_2'(h) = c_2\, \partial_t F_k(h) + a_{21}\, F_k(0)\, \partial_x F_k(h)$$

da cui:

$$s^{(2)}(0) = (2\, b_2\, c_2 - 1)\, \partial_t F_k(0) + (2\, b_2\, a_{21} - 1)\, F_k(0)\, \partial_x F_k(0)]$$

Infine:

$$s^{(1)}(0) = 0 \text{ per ogni } F \quad \Leftrightarrow \quad b_1 + b_2 - 1 = 0$$
$$s^{(2)}(0) = 0 \text{ per ogni } F \quad \Leftrightarrow \quad 2\, b_2\, c_2 - 1 = 0 \quad \text{e} \quad 2\, b_2\, a_{21} - 1 = 0$$

e il metodo risulta di ordine *almeno* due per $h \to 0$ se e solo se:

$$b_1 + b_2 = 1 \quad , \quad 2\, b_2\, c_2 = 1 \quad , \quad 2\, b_2\, a_{21} = 1$$

Ad esempio:

$b_1 = b_2 = 1/2$, $c_2 = a_{21} = 1$ (metodo di Heun)[1]

$b_1 = 0$, $b_2 = 1$, $c_2 = a_{21} = 1/2$ (metodo di Eulero modificato o del punto medio)

(4.28) Osservazione.

Per un metodo di ordine p si ha:[2]

- N *tende a infinito come* $1 / \sqrt[p+1]{E}$;
- *Per ogni* k: ET(k) *tende a zero come* $\sqrt[p+1]{E^p} = E^{\frac{p}{p+1}}$

1 É il metodo dell'Esempio (4.23), detto anche 'metodo di Eulero migliorato'.

2 Dimostrazione omessa.

(4.29) Osservazione.

La Definizione (4.24) si estende a metodi con un numero qualsiasi di stadi. Inoltre: l'ordine massimo di un metodo ad uno stadio è *uno* (esiste un solo metodo ad uno stadio di ordine uno: il metodo TS(1)), di un metodo a due stadi è *due* e di un metodo a tre stadi è *tre*. In generale, l'ordine massimo di un metodo è *minore o uguale al numero di stadi*.