Lezione 29 (ore 58,59) - 2 dicembre 2025, 16:30 - 18:30 F3

(4.05) Definizione (errore totale).

Siano t(k) un istante di integrazione e x(k) la corrispondente approssimazione generati da un metodo numerico per l'approssimazione della soluzione del problema

(§) $$x'(t) = F(t, x(t)) \quad , \quad x(t_0) = x_0 \quad , \quad t \in [t_0, t_f]$$

La colonna:

$$et(k) = x(k) - y(t(k);\, x_0, t_0) \in R^n$$

si chiama *errore totale all'istante* t(k). La norma di et(k), che si indica con ET(k), è *una misura di quanto il metodo sbaglia, all'istante* t(k), *nel seguire la soluzione del problema* (§).

(4.06) Definizione (metodo convergente per $E \to 0$).

Un metodo numerico per l'approssimazione della soluzione del problema (§) è *convergente per* $E \to 0$ se: *per ogni* $\Delta > 0$ esiste E_* tale che *se* $E < E_*$ *allora* per gli istanti $t(0) = t_0, \ldots, t(N)$ e le colonne $x(0) = x_0, \ldots, x(N)$ determinati dal metodo si ha:

$$t(N) = t_f \qquad e \qquad \max \{ ET(0), \ldots, ET(N) \} < \Delta$$

(4.07) Definizione (errore locale).

Siano t(k-1) e t(k) due istanti di integrazione consecutivi e x(k-1), x(k) le corrispondenti approssimazioni generati da un metodo numerico per l'approssimazione della soluzione del problema (§). La colonna:

$$el(k) = x(k) - y(t(k);\, x(k-1), t(k-1)) \in R^n$$

si chiama *errore locale all'istante* t(k). La norma di el(k), che si indica con EL(k), è *una misura di quanto il metodo sbaglia, all'istante* t(k), *nel seguire la soluzione dell'equazione differenziale* $x'(t) = F(t, x(t))$ *che all'istante* t(k-1) *passa per* x(k-1).

(4.08) Osservazione (relazione tra errore locale e totale).

Si ha:

$$et(k) = x(k) - y(t(k);\, x_0, t_0) = (\, x(k) - y(t(k);\, x(k-1), t(k-1))\,) +$$
$$+ (\, y(t(k);\, x(k-1), t(k-1)) - y(t(k);\, x_0, t_0)\,)$$

da cui:

$$et(k) = el(k) + (\, y(t(k);\, x(k-1), t(k-1)) - y(t(k);\, x_0, t_0)\,)$$

Introducendo la notazione:

$$\Delta y(t'';\, s,\, t') = y(t'';\, y(t';\, x_0, t_0) + s,\, t') - y(t'';\, y(t';\, x_0, t_0),\, t')$$

si riscrive, infine:

$$et(k) = el(k) + \Delta y(t(k);\ et(k-1),\ t(k-1))$$

La quantità $\Delta y(t'';\ s,\ t')$ descrive come *l'equazione differenziale* tramanda all'istante t" lo scostamento, s, all'istante t', dalla soluzione $y(t;\ x_0,t_0)$ del problema (§).

(4.A) METODO TS(1) - EULERO ESPLICITO

(4.09) <u>Ipotesi</u> (regolarità delle soluzioni).

Supponiamo che *tutte* le soluzioni dell'equazione differenziale $x'(t) = F(\ t,x(t)\ )$ abbiano *derivata seconda continua*.

La richiesta è certamente soddisfatta se *tutte* le derivate parziali prime della funzione $F(\ t,x\ )$ *esistono* e sono funzioni *continue* di t ed x.

(Infatti: se y(t) è soluzione dell'equazione differenziale si ha:

$$y''(t) = (y'(t))' = (\ F(\ t,y(t)\ ))' = \partial_t F(\ t,y(t)\ ) + \partial_x F(\ t,y(t)\ ) \cdot y'(t)$$

che risulta continua perché lo sono $\partial_t F(\ t,x\ )$, $\partial_x F(\ t,x\ )$, y(t) e y'(t).)

(4.10) <u>Definizione</u> (metodo TS(1) - Eulero esplicito).

Il *metodo TS(1)* (o *metodo di Eulero esplicito*) è definito dalle procedure seguenti.

- SCELTA di h(k). Dati $E > 0$ e $\lambda > 0$, per ogni k si pone:

  $$d(k) = \max \{\ \lambda\ ,\ \|\ y''(t(k);\ x(k),t(k))\ \|\ \}$$

  e poi:

  $$h(k) = \min \left\{\ \sqrt{\frac{2E}{d(k)}}\ ,\ t_f - t(k)\ \right\}$$

- CALCOLO di x(k+1). Dopo aver scelto h(k) si pone:

  $$x(k+1) = x(k) + F(\ t(k),x(k)\ )\ h(k)$$

Il nome del metodo è conseguenza del fatto che la funzione $x(k) + F(\ t(k),x(k)\ )\ h$ si ottiene *troncando al termine di ordine uno* la *serie di Taylor* di $y(t(k) + h;\ x(k),t(k))$ in $h = 0$.

(4.11) <u>Osservazione</u> (sulla scelta di h(k)).

Indicando con y(t) la soluzione y(t; x(k),t(k)) dell'equazione differenziale, sia s la funzione da R in R^n definita da:

$$s(h) = x(k) + F(\ t(k),x(k)\ )\ h - y(t(k) + h)$$

Detto G il grafico di y(t), il valore s(h) rappresenta lo *scostamento* tra G e la retta tangente a G in (t(k),x(k)), misurato all'istante t(k) + h. *Per* $h > 0$ *la quantità* s(h) *è l'errore locale all'istante* t(k) + h.

Poiché y(t) ha derivata seconda continua, anche s(h) *ha derivata seconda continua*. Per la Formula di Taylor in h = 0 con resto di Lagrange, esiste una funzione z da R in R^n tale che:

$$s(h) = s(0) + s'(0)\ h + \frac{1}{2}\ s''(0)\ h^2 + z(h)\ h^2 \qquad \text{e} \qquad z(h) \to 0 \text{ per } h \to 0$$

e quindi, essendo $s(0) = x(k) - y(t(k)) = 0$, $s'(0) = F(\ t(k),x(k)\ ) - y'(t(k)) = 0$ e $s''(0) = -\ y''(t(k))$:

$$s(h) = -\ \frac{1}{2}\ y''(t(k))\ h^2 + z(h)\ h^2 \qquad \text{con} \qquad z(h) \to 0 \text{ per } h \to 0$$

Se y"(t(k)) non è zero *allora*:

- *Per* h *piccolo*: $-\ \frac{1}{2}\ y''(t(k))\ h^2$ *è una buona stima di* s(h)

  (nel senso che l'errore relativo tende a zero per $h \to 0$)

- Si ha:

$$\left\|\ -\ \frac{1}{2}\ y''(t(k))\ h^2\ \right\| = E \qquad \Leftrightarrow \qquad h = \sqrt{\frac{2E}{\|\ y''(t(k))\ \|}}$$

La scelta di h(k) garantisce che, in ogni caso e per ogni $\lambda > 0$, si ha:

$$\left\|\ -\ \frac{1}{2}\ y''(t(k))\ h(k)^2\ \right\| \leqslant E$$

Il parametro λ ha lo scopo di evitare che possa essere d(k) = 0 e garantisce, inoltre, che:

$$\textit{per ogni } k:\quad d(k) \geqslant \lambda \quad \textit{e quindi} \quad h(k) \leqslant \sqrt{\frac{2E}{\lambda}}$$