Lezione 28 (ore 56,57) - 27 novembre 2025, 8:30 - 10:30 F3

(3.31) Scilab.

La funzione predefinita *pinv* di *Scilab* restituisce la matrice pseudoinversa di una matrice. Ad esempio (si veda l'Esempio (3.27) della Lezione 27):

```
--> A = [1,1;1,1;1,1]

 A = [3x2 double]

   1.   1.
   1.   1.
   1.   1.

--> pinv(A)

 ans = [2x3 double]

   0.1666667   0.1666667   0.1666667
   0.1666667   0.1666667   0.1666667
```

La funzione predefinita *backslash* (\) è utilizzata per risolvere un sistema di equazioni lineari. Precisamente, se $A \in R^{r \times c}$ è una matrice e $b \in R^r$ è una colonna, dopo l'assegnamento:

$$x = A\backslash b$$

si ha:[1]

- se $r = c$ e $c_1(A) \leqslant \frac{1}{10\,u}$

  allora:

  x è un'approssimazione della soluzione del sistema $A\,x = b$ calcolata con un procedimento equivalente all'applicazione delle procedure EGPP, SA, SI;

- se $r = c$ e $c_1(A) > \frac{1}{10\,u}$ oppure $r > c$

  allora:

  x è un'approssimazione di un elemento di $S_{MQ}(A,b)$ - di solito *non* quello di norma minima - calcolato con un procedimento che utilizza una fattorizzazione QR di A.

Ad esempio (vedere l'Eesempio (3.25) della Lezione 27):

```
--> A = [1,1;1,1]

 A = [2x2 double]

   1.   1.
   1.   1.
```

1 Sia N una norma in R^n. In *Scilab*, quando $A \in R^{n \times n}$ è una matrice *non invertibile*, si pone: $c_N(A) = +\infty$.

```
--> b = [1;0]

 b = [2x1 double]

   1.
   0.

--> x = A\b

 x = [2x1 double]

   0.5000000
   0.

--> y = pinv(A) * b

 y = [2x1 double]

   0.2500000
   0.2500000
```

Le funzione predefinita *qr* restituisce un'approssimazione di una fattorizzazione QR di una matrice, anche non quadrata. Precisamente, se A $\in \mathrm{R}^{r \times c}$ con r > c, dopo l'assegnamento:

```
[Q,R] = qr(A)
```

la matrice Q $\in \mathrm{R}^{r \times r}$ è un'approssimazione della matrice ortogonale calcolata con il metodo di Householder (Osservazione (2.21) della Lezione 17) applicato ad A e R $\in \mathrm{R}^{r \times c}$ è una matrice con elementi nulli sotto la diagonale principale. Ad esempio:

```
--> A = [1,0;1,1;1,1]

 A = [3x2 double]

   1.   0.
   1.   1.
   1.   1.

--> [Q,R] = qr(A)

 Q = [3x3 double]

  -0.5773503   0.8164966  -8.756D-17
  -0.5773503  -0.4082483  -0.7071068
  -0.5773503  -0.4082483   0.7071068

 R = [3x2 double]

  -1.7320508  -1.1547005
   0.         -0.8164966
   0.          0.
```

Per ottenere un'approssimazione di una fattorizzazione QR di A come definita nella Definizione (3.28) della Lezione 27 si può utilizzare la funzione qr come segue:

```
--> [U,T] = qr(A,'e')

 U = [3x2 double]

  -0.5773503   0.8164966
  -0.5773503  -0.4082483
  -0.5773503  -0.4082483

 T = [2x2 double]

  -1.7320508  -1.1547005
   0.         -0.8164966
```

I fattori U,T sono ottenuti dai fattori Q,R eliminando, rispettivamente, la terza colonna di Q e la terza riga di R. Infatti, se si esegue il prodotto Q R per colonne, si osserva che, dette q_1, q_2, q_3 le colonne di Q e r_{ij} gli elementi di R, si ha:

$$Q\,R = (r_{11}\,q_1 + 0\,q_2 + 0\,q_3\ ,\ r_{12}\,q_1 + r_{22}\,q_2 + 0\,q_3) = U\,T$$

(4) METODI NUMERICI PER EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

(4.01) Esempio (oscillatore armonico smorzato).

I moti di un oscillatore armonico smorzato sono descritti dall'*equazione differenziale*:

(*) $$x''(t) + a\,x'(t) + b\,x(t) = 0$$

in cui l'incognita è la *funzione* a valori reali x(t). Questa è un'equazione differenziale del *secondo ordine* (lineare, a coefficienti costanti, omogenea). Una *soluzione* dell'equazione è una funzione y(t) a valori reali *con derivata seconda* che soddisfa l'uguaglianza $y''(t) + a\,y'(t) + b\,y(t) = 0$ per *ogni* t in R. L'equazione differenziale determina *tutti* i possibili moti dell'oscillatore (l'equazione (*) ha *infinite* soluzioni). Ciascuno dei moti è individuato dalle *condizioni iniziali*:

(CI) $$x(t_0) = x_0 \quad , \quad x'(t_0) = v_0$$

Si chiama *Problema di Cauchy* quello di *determinare le soluzioni dell'equazione differenziale che soddisfano le condizioni iniziali.*

L'equazione differenziale del secondo ordine (*) è *equivalente* ad un *sistema di* due *equazioni del primo ordine.* L'equivalenza significa, in questo caso, che: se y(t) è soluzione dell'equazione (*) allora, posto:

$$u_1(t) = y(t) \quad , \quad u_2(t) = y'(t)$$

si ha:

$$u_1'(t) = u_2(t) \quad , \quad u_2'(t) = - a\,u_2(t) - b\,u_1(t)$$

dunque la colonna $(u_1(t), u_2(t))^t$ è soluzione del sistema

(**) $$x_1'(t) = x_2(t) \quad , \quad x_2'(t) = - a\,x_2(t) - b\,x_1(t)$$

Viceversa: se $(y_1(t), y_2(t))^t$ è una soluzione del sistema (**), allora, posto $y(t) = y_1(t)$ si ha: $y'(t) = y_1'(t) = y_2(t)$ e $y''(t) = y_1''(t) = y_2'(t) = - a\,y_2(t) - b\,y_1(t)$ ovvero:

$$y''(t) + a\,y'(t) + b\,y(t) = 0$$

cioè $y(t)$ è soluzione dell'equazione (*). Inoltre, $y(t)$ è soluzione del Problema di Cauchy:

$$x''(t) + a\,x'(t) + b\,x(t) = 0 \quad ; \quad x(t_0) = x_0 \quad , \quad x'(t_0) = v_0$$

se e solo se $(y(t), y'(t))^t$ è soluzione del Problema di Cauchy:

$$x_1'(t) = x_2(t) \quad , \quad x_2'(t) = - a\,x_2(t) - b\,x_1(t) \quad ; \quad x_1(t_0) = x_0 \quad , \quad x_2(t_0) = v_0$$

(4.02) <u>Osservazione</u>.

Le procedure che descriveremo sono pensate per approssimare *la* soluzione del Problema di Cauchy:

(§) $$x'(t) = F(\,t,x(t)\,) \quad , \quad x(t_0) = x_0$$

per t in un intervallo *limitato* $[t_0,t_f]$. L'*incognita* del problema è la funzione $x(t)$ a valori in R^n; i *dati* sono: *la funzione* F definita in $R \times R^n$ a valori in R^n, *gli istanti* t_0 *e* $t_f > t_0$ e *la colonna* x_0 in R^n.

L'asserto precedente presuppone che per il problema (§) si abbia *esistenza ed unicità* della soluzione. Vedremo poi che anche per *descrivere le procedure* sarà necessario fare un'ipotesi ulteriore.

(4.03) <u>Ipotesi</u> (di esistenza ed unicità).

Per ogni $\underline{t}$ in R e $\underline{x}$ in R^n esiste una sola soluzione dell'equazione differenziale:

$$x'(t) = F(\,t,x(t)\,)$$

che verifica la condizione iniziale:

$$x(\underline{t}) = \underline{x}$$

Indicheremo tale soluzione con $y(t;\,\underline{x},\underline{t})$.

(4.04) <u>Definizione</u> (metodo numerico).

Un *metodo numerico per l'approssimazione della soluzione del Problema di Cauchy* (§) su $[t_0,t_f]$ è una procedura che costruisce, in base al valore di un parametro E controllato dall'utilizzatore, numeri reali $t(0) = t_0,\dots,t(N)$ in $[t_0,t_f]$, colonne $x(0) = x_0,\dots,x(N)$ in

R^n e, per k = 0,...,N, suggerisce di utilizzare x(k) come approssimazione di y(t(k); x_0,t_0).

I numeri t(0),...,t(N) si chiamano *istanti di integrazione* e, per k = 0,...,N-1, il numero h(k) = t(k+1) - t(k) si chiama *passo di integrazione all'istante* t(k).

Una realizzazione in *Scilab* di un metodo numerico ha la struttura seguente:

```
function [T,X] = MetodoNumerico(x0,t0,tf,F,E)

k = 0; t(0) = t0; x(0) = x0;
while t(k) < tf,
   SCEGLI h(k) in base al valore di E;
   CALCOLA x(k+1);
   t(k+1) = t(k) + h(k);
   k = k+1;
end;

endfunction
```

Le variabili di uscita sono, rispettivamente, la riga T e la matrice X tali che:

T = (t(0),...,t(N))   ,   X = (x(0),...,x(N))

Un metodo numerico è specificato dalle procedure di *scelta* di h(k) e *calcolo* di x(k+1).