Lezione 27 (ore 54,55) - 26 novembre 2025, 11:30 - 13:30 A13

(3.20) Esempi.

(1) Determinare le soluzioni nel senso dei minimi quadrati del sistema $A\,x = b$:

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} x = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

e la proiezione ortogonale di b su C(A).

Soluzione: Il sistema delle equazioni normali è: $3\,x = 1$ e quindi l'unica soluzione nel senso dei minimi quadrati è: $x^* = 1/3$. La proiezione ortogonale di b su C(A) è:

$$b_* = 1/3\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

(2) Determinare le soluzioni nel senso dei minimi quadrati del sistema $\underline{A}\,x = \underline{b}$:

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 2\\1 & 2\end{bmatrix} x = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

e la proiezione ortogonale di $\underline{b}$ su $C(\underline{A})$.

Soluzione: Il sistema delle equazioni normali è:

$$\begin{bmatrix}3 & 6\\6 & 12\end{bmatrix} x = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

e:

$$\ker \underline{A}^t\,\underline{A} = \mathrm{span}\{ \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} \}$$

Posto:

$$y = \begin{bmatrix}1/3\\0\end{bmatrix}$$

si ottiene:

$$S_{MQ}(\underline{A},\underline{b}) = \begin{bmatrix}1/3\\0\end{bmatrix} + \mathrm{span}\{ \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} \} = \{ \begin{bmatrix}1/3+2\lambda\\-\lambda\end{bmatrix} ,\ \lambda \in R \}$$

In questo caso, l'insieme $S_{MQ}(\underline{A},\underline{b})$ ha *infiniti elementi* perché le colonne di $\underline{A}$ sono *linearmente dipendenti*.

La proiezione ortogonale di $\underline{b}$ su $C(\underline{A})$ è:

$$\underline{b}_* = 1/3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La proiezione è la stessa dell'esempio precedente perché $\underline{b}$ = b e C($\underline{A}$) = C(A).

(3.21) Esempio (minimi quadrati pesati).

Si considerino il sistema A x = b:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ed il sistema $\underline{A}$ x = $\underline{b}$, ottenuto moltiplicando per due la prima e la terza equazione del sistema A x = b:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

I due sistemi sono *equivalenti* ma: $S_{MQ}(A,b) \neq S_{MQ}(\underline{A},\underline{b})$. Infatti:

$$S_{MQ}(A,b) = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/2 \end{bmatrix} \quad , \quad S_{MQ}(\underline{A},\underline{b}) = \begin{bmatrix} 5/9 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Questo *non deve sorprendere*, infatti per i due sistemi si ha $SQ(x) \neq \underline{SQ}(x)$:

$$SQ(x) = (x_1 - x_2)^2 + (x_1 - 1)^2 + (x_1 + x_2 - 1)^2$$

e:

$$\underline{SQ}(x) = 4\,(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - 1)^2 + 4\,(x_1 + x_2 - 1)^2$$

La funzione $\underline{SQ}$ si ottiene *pesando* gli addendi della funzione SQ con 'pesi' positivi.

(3.22) Esempio.

Si considerino i dati (-1,0), (0,1), (1,1). Determinare gli elementi di F = span{ 1,x } che meglio approssimano i dati nel senso dei minimi quadrati.

Si osservi che, scelto un piano cartesiano, ciascuno degli elementi di F ha per grafico una retta non verticale. Il problema si può quindi riformulare in: Determinare *le rette* che meglio approssimano i dati nel senso dei minimi quadrati.

Per quanto mostrato nell'Esempio (3.14) e nell'Osservazione (3.15) della Lezione 25, il problema si risolve determinando le soluzioni nel senso dei minimi quadrati del sistema (che traduce le condizioni di interpolazione):

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema delle equazioni normali ha una sola soluzione (infatti le colonne...):

$$x^* = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

e l'unica retta che meglio approssima i dati nel senso dei minimi quadrati è il grafico dell'unico elemento di F = span{ 1,x } che meglio approssima i dati nel senso dei minimi quadrati:

$$p(x) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\,x$$

(3.23) <u>Esempio</u>.

Si considerino i dati (1,0), (1/2,1), (1/3,2). Determinare gli elementi di F = span{ 1,1/x } che meglio approssimano i dati nel senso dei minimi quadrati.

Procedendo come nell'esempio precedente, il problema si risolve determinando le soluzioni nel senso dei minimi quadrati del sistema (che traduce le condizioni di interpolazione):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Il sistema delle equazioni normali ha una sola soluzione:

$$x^* = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e l'unico elemento di F che meglio approssima i dati nel senso dei minimi quadrati è:

$$f(x) = -1 + \frac{1}{x}$$

(3.24) <u>Osservazione</u>.

Siano $A \in R^{r \times c}$ con $r > c$, $b \in R^r$ e $S_{MQ}(A,b)$ l'insieme delle soluzioni di $A\,x = b$ nel senso dei minimi quadrati. Si ha:[1]

esiste una sola colonna $y_* \in S_{MQ}(A,b)$ di *norma minima*[2]

(3.25) <u>Esempio</u>.

Sia $A\,x = b$ il sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Risulta:

$$S_{MQ}(A,b) = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} + \text{span}\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \}$$

e, disegnando l'insieme $S_{MQ}(A,b)$ su un piano cartesiano, si verifica facilmente che

1 Dimostrazione dell'asserto omessa.

2 Più formalmente: la funzione $\| x \|$ ha un solo punto di minimo assoluto su $S_{MQ}(A,b)$.

l'elemento di norma minima (ovvero quello più vicino all'origine) è:

$$y_* = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}$$

(3.26) <u>Osservazione</u> (matrice pseudoinversa).

Sia $A \in R^{r \times c}$ con $r > c$. Per ogni $b \in R^r$, sia $S_{MQ}(A,b)$ l'insieme delle soluzioni di $A\,x = b$ nel senso dei minimi quadrati.

La funzione $F: R^r \to R^c$ definita da:

$$F(b) = \text{l'elemento di } S_{MQ}(A,b) \text{ di norma minima}$$

è un'*applicazione lineare* da R^r in R^c.[3] Quindi esiste una matrice di dimensione $c \times r$, che si indica con A^+, tale che:

$$F(b) = A^+\,b$$

La matrice A^+ si chiama *matrice pseudoinversa di* A.

Se le colonne di A sono linearmente indipendenti allora (si veda l'Osservazione (3.19) della Lezione 26) $S_{MQ}(A,b)$ ha un solo elemento, che è quello di norma minima, e dalle equazioni normali si ottiene, essendo $A^t\,A$ invertibile:

$$F(b) = (A^t\,A)^{-1}\,A^t\,b$$

In questo caso si ha allora:

$$A^+ = (A^t\,A)^{-1}\,A^t$$

Si osservi che se $A \in R^{n \times n}$ è una matrice invertibile, allora risulta $A^+ = A^{-1}$. Questo spiega perché A^+ si chiami matrice pseudoinversa.

(3.27) <u>Esempio</u>.

Determinare la matrice pseudoinversa di:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Per definizione $A^+ \in R^{2 \times 3}$ è l'unica matrice tale che: per ogni $b \in R^r$, $A^+\,b$ = l'elemento di $S_{MQ}(A,b)$ di norma minima. Le tre colonne di A^+ sono allora, dette e_1, e_2, e_3 le colonne della base canonica di R^3:

$$F(e_1)\ ,\ F(e_2)\ ,\ F(e_3)$$

Si ha:

$$S_{MQ}(A,e_1) = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \end{bmatrix} + \text{span}\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \}$$

e quindi, ragionando come nell'Esempio (3.25):

---

3 Dimostrazione omessa.

$$F(e_1) = \begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/6 \end{bmatrix}$$

Allo stesso modo si determinano:

$$F(e_2) = F(e_3) = \begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/6 \end{bmatrix}$$

Infine:

$$A^+ = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{bmatrix}$$

(3.28) <u>Definizione</u> (fattorizzazione QR caso non quadrato).

Sia $A \in R^{r \times c}$ con $r > c$. Una *fattorizzazione QR* di A è una coppia U,T tale che:

- $U \in R^{r \times c}$ è una matrice a colonne ortonormali
- $T \in R^{c \times c}$ è una matrice triangolare superiore
- $U\,T = A$

(3.29) <u>Esempio</u> (di calcolo di una fattorizzazione QR nel caso non quadrato, con GS).

Sia:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in R^{3 \times 2}$$

Per cercare una fattorizzazione QR di A possiamo utilizzare una ovvia variante della procedura GS. Dette a_1 e a_2 le colonne di A:

<u>Passo uno</u>.

Cerchiamo $\Omega = [\omega_1, \omega_2] \in R^{3 \times 2}$ a colonne ortogonali e $\Theta \in R^{2 \times 2}$ triangolare superiore con $\theta_{kk} = 1$ tali che $\Omega\,\Theta = A$. *Se matrici siffatte esistono*, riscrivendo l'ultima uguaglianza *per colonne* si ha:

$$\omega_1 = a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \omega_1\,\theta_{1,2} + \omega_2 = a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La prima uguaglianza determina ω_1. Dalla seconda segue che:

$$(\omega_1\,\theta_{1,2}) \bullet \omega_1 + \omega_2 \bullet \omega_1 = a_2 \bullet \omega_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2$$

Poiché ω_1 e ω_2 sono ortogonali, si ha $\omega_2 \bullet \omega_1 = 0$. Allora, essendo $\omega_1 \neq 0$, si ha *necessariamente*:

$$\theta_{1,2} = (a_2 \bullet \omega_1) \;/\; (\omega_1 \bullet \omega_1) = 2/3$$

e quindi:

$$\omega_2 = a_2 - \omega_1\,\theta_{1,2} = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

Dunque:

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & -2/3 \\ 1 & 1/3 \\ 1 & 1/3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Theta = \begin{bmatrix} 1 & 2/3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Passo due</u>.

La fattorizzazione di A trovata al passo precedente *non è* una fattorizzazione QR perché le colonne di Ω non hanno norma unitaria. Questo secondo passo determina, se possibile, una fattorizzazione QR normalizzando le colonne di Ω.

Sia: $\Delta = \mathrm{diag}(\|\omega_1\|, \|\omega_2\|)$ = diag(sqrt(3),sqrt(2/3)). Si verifica facilmente che la coppia

$$U = \Omega\, \Delta^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -\sqrt{2/3} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \quad , \quad T = \Delta\, \Theta = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2/\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2/3} \end{bmatrix}$$

è una fattorizzazione QR di A. Si osservi che per la matrice T, triangolare superiore, si ha:

$$T_{k,k} = \|\omega_k\| > 0$$

(3.30) <u>Osservazione</u> (fattorizzazione QR e minimi quadrati).

Sia U,T una fattorizzazione QR della matrice $A \in R^{r \times c}$ con $r > c$. Si ha:

$$A^t A = (U\,T)^t (U\,T) = (T^t U^t)(U\,T) = T^t (U^t U)\, T$$

Poiché la matrice $U \in R^{r \times c}$ ha colonne ortonormali, allora si ha $U^t U = I \in R^{c \times c}$. Allora:

$$A^t A = T^t T$$

Inoltre:

$$A^t b = (U\,T)^t b = T^t U^t b$$

Se la matrice T è invertibile, ovvero se le colonne di A sono linearmente indipendenti, allora anche T^t è invertibile e i sistemi

$$A^t A\, x = A^t b \quad \text{e} \quad T\, x = U^t b$$

sono *equivalenti*. I due sistemi, però, *non hanno le stesse proprietà di condizionamento*. Infatti si ha:[4]

$$c_2(A^t A) = (c_2(T))^2$$

ovvero: il sistema $A^t A\, x = A^t b$ ha proprietà di condizionamento *peggiori* di quelle del sistema $T\, x = U^t b$. Per determinare le soluzioni di $A\, x = b$ nel senso dei minimi quadrati utilizzando un calcolatore si determina una fattorizzazione QR di A e si risolve il sistema $T\, x = U^t b$.

4 Dimostrazione omessa.