

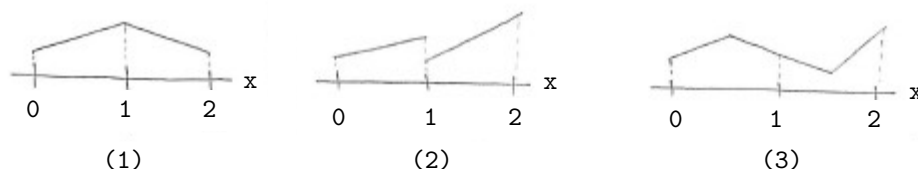
(3.08) Definizione (funzioni continue e lineari a tratti).

Assegnati numeri reali *ordinati*  $x_0 < x_1 < \dots < x_k$  e posto, per  $j = 1, \dots, k$ :  $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ , una funzione  $f: [x_0, x_k] \rightarrow \mathbb{R}$  si dice *continua e lineare a tratti* su  $x_0, \dots, x_k$  se:

- $f$  è continua;
- $f$  è lineari a tratti su  $x_0, \dots, x_k$  ovvero: detta  $p_j(x)$  la restrizione di  $f$  a  $I_j$  si ha:  $p_j \in P_1(\mathbb{R})$ .

L'insieme delle funzioni continue e lineari a tratti su  $x_0, \dots, x_k$  si indica con  $C\text{-LAT}(x_0, \dots, x_k)$ .

(3.09) Esempio.



La figura (1) rappresenta il grafico di una funzione continua e lineare a tratti su  $0, 1, 2$ . La figura (2) rappresenta il grafico di una funzione lineare a tratti su  $0, 1, 2$  ma *non* continua. La figura (3) rappresenta il grafico di una funzione continua e lineari a tratti ma *non* su  $0, 1, 2$ .

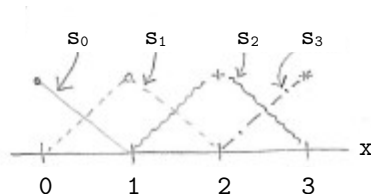
(3.09) Osservazione.<sup>1</sup>

(1) L'insieme  $C\text{-LAT}(x_0, \dots, x_k)$  è un *sottospazio vettoriale* dello spazio delle funzioni continue su  $[x_0, x_k]$ , di *dimensione*  $k+1$ . I  $k+1$  elementi  $s_0(x), \dots, s_k(x)$  di  $C\text{-LAT}(x_0, \dots, x_k)$  definiti da:

$$s_i(x_j) = 1 \text{ se } i = j, \quad s_i(x_j) = 0 \text{ se } i \neq j$$

sono la '*base canonica*' di  $C\text{-LAT}(x_0, \dots, x_k)$ .

Ad esempio, i grafici degli elementi della base canonica di  $C\text{-LAT}(0, 1, 2, 3)$  sono:



(2) Assegnati numeri reali  $y_0, \dots, y_k$ , la combinazione lineare  $y_0 s_0(x) + \dots + y_k s_k(x)$  è l'*unico* elemento di  $C\text{-LAT}(x_0, \dots, x_k)$  che interpola i dati  $(x_0, y_0), \dots, (x_k, y_k)$ .

<sup>1</sup> La dimostrazione degli asserti di questa Osservazione è omessa.

(3.10) Applicazioni.

(1) Grafici in *Scilab*.

Sia  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. La sequenza di istruzioni:

```
> x = linspace(a,b,n)';
> plot(x,f(x));
```

genera, in una finestra grafica, il grafico della spezzata di vertici i punti di coordinate  $(x(1), f(x(1))), \dots, (x(n), f(x(n)))$ . Questa spezzata è il grafico dell'unico elemento  $\sigma_n(x) \in C\text{-LAT}(x(1), \dots, x(n))$  che interpola i dati  $(x(1), f(x(1))), \dots, (x(n), f(x(n)))$ . Il grafico di  $\sigma_n(x)$  è utilizzato come approssimazione di quello della funzione  $f(x)$ . Vedremo tra poco quanto sia accurata l'approssimazione.

(2) Formula dei trapezi.

Sia  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Si vuole conoscere il valore (certamente esistente per la continuità di  $f$ ):

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Un procedimento che fornisce un'approssimazione di  $I$  è il seguente:

- scelto  $k$ , si suddivide l'intervallo  $[a,b]$  in  $k$  sottointervalli di uguale ampiezza:

$$\frac{b-a}{k}$$

individuati dai  $k+1$  punti  $x_0 = a, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k = b$  (detti *odi*):

- si considera l'unico elemento  $\sigma_k(x) \in C\text{-LAT}(x_0, \dots, x_k)$  che interpola i dati  $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_k, f(x_k))$ ;
- si approssima  $I$  con:

$$J_k = \int_a^b \sigma_k(x) dx$$

Il valore  $J_k$  si calcola facilmente. Introdotta la base canonica  $s_0(x), \dots, s_k(x)$  di  $C\text{-LAT}(x_0, \dots, x_k)$  si ha:

$$J_k = \int_a^b \sigma_k(x) dx = \int_a^b (f(x_0)s_0(x) + \dots + f(x_k)s_k(x)) dx = f(x_0) \int_a^b s_0(x) dx + \dots + f(x_k) \int_a^b s_k(x) dx$$

e quindi:

$$J_k = h \left[ \frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \dots + f(x_{k-1}) + \frac{f(x_k)}{2} \right]$$

Quest'ultima espressione si chiama *formula dei trapezi*. Vedremo tra poco quanto sia accurata l'approssimazione.

(3.11) Teorema (errore nell'interpolazione polinomiale).

Assegnati numeri reali  $x_0 < x_1 < \dots < x_k$ , e posto  $I = [x_0, x_k]$ , siano  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  con derivata di ordine  $k+1$  continua e  $p_k \in P_k(\mathbb{R})$  il polinomio che interpola i dati  $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_k, f(x_k))$ . Allora, per ogni  $x \in I$  esiste  $\theta \in I$  tale che:

$$f(x) - p_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!} (x-x_0) \cdots (x-x_k)$$

Inoltre, posto:

$$M_j = \max_{x \in I} |f^{(j)}(x)|$$

si ottiene facilmente la limitazione:

$$\max_{x \in I} |f(x) - p_k(x)| \leq \frac{M_{k+1}}{(k+1)!} (\text{mis } I)^{k+1}$$

Dimostrazione: omessa.

(3.12) Osservazione (approssimazione con elementi di C-LAT).

Siano  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  con derivata seconda continua e, per  $j = 0, \dots, k$ :

$$x_j = a + \frac{b-a}{k} j$$

I punti  $x_0, \dots, x_k$  dividono l'intervallo  $[a, b]$  in  $k$  intervalli di uguale ampiezza.

Si consideri l'intervallo  $[x_0, x_1]$ . Detto  $p_1 \in P_1(\mathbb{R})$  il polinomio che interpola i dati  $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))$ , utilizzando la limitazione mostrata nel teorema precedente, si ha:

$$\max_{x \in [x_0, x_1]} |f(x) - p(x)| \leq \frac{M_2}{2} \left( \frac{b-a}{k} \right)^2$$

Ripetendo il ragionamento si ottiene la stessa limitazione per ciascuno dei  $k$  sottointervalli di  $[a, b]$ . Perciò, detto  $\sigma_k(x)$  l'elemento di C-LAT( $x_0, \dots, x_k$ ) che interpola i dati  $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_k, f(x_k))$ , si ha:

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - \sigma_k(x)| \leq \frac{M_2}{2} \left( \frac{b-a}{k} \right)^2$$

(3.13) Osservazione (accuratezza delle approssimazioni nelle applicazioni).

(1) Scelta come misura (assoluta) dell'errore commesso approssimando il grafico di  $f(x)$  con quello di  $\sigma_n(x)$  la quantità:

$$e_n(f) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - \sigma_n(x)|$$

il risultato dell'osservazione precedente mostra che: se  $f$  ha derivata seconda continua allora:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_n(f) = 0$$

e l'approssimazione può essere resa *accurata quanto si vuole* scegliendo  $n$  opportunamente grande.

- (2) Scelta come misura (assoluta) dell'errore commesso approssimando  $I$  con  $J_k$  la quantità  $|J_k - I|$ , il risultato dell'osservazione precedente mostra che: se  $f$  ha derivata seconda continua allora:

$$|J_k - I| = \left| \int_a^b (\sigma_k(x) - f(x)) dx \right| \leq \int_a^b |\sigma_k(x) - f(x)| dx \leq \int_a^b \frac{M_2}{2} \left( \frac{b-a}{k} \right)^2 dx = \frac{M_2}{2} \frac{(b-a)^3}{k^2}$$

Anche in questo caso si ha dunque:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |J_k - I| = 0$$

e l'approssimazione può essere resa *accurata quanto si vuole* scegliendo  $k$  opportunamente grande.

- (3.14) Esempio (riformulazione del problema dei minimi quadrati).

Si considerino i dati ( $k = 2$ ):  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$  e lo spazio vettoriale  $F = \text{span}\{f_1(x), f_2(x)\} = \{a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) \text{ con } a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ . Lo scarto quadratico  $SQ(f)$  si riscrive, utilizzando l'espressione di  $f(x)$  in termini dei generatori  $f_1(x), f_2(x)$ :

$$SQ(f) = (a_1 f_1(x_0) + a_2 f_2(x_0) - y_0)^2 + (a_1 f_1(x_1) + a_2 f_2(x_1) - y_1)^2 + (a_1 f_1(x_2) + a_2 f_2(x_2) - y_2)^2$$

Osservando che se  $v = (v_1, \dots, v_n)^T \in \mathbb{R}^n$  si ha  $(N_2(v))^2 = v_1^2 + \dots + v_n^2$ , l'ultima somma può essere riscritta come:<sup>2</sup>

$$\left\| \begin{bmatrix} a_1 f_1(x_0) + a_2 f_2(x_0) - y_0 \\ a_1 f_1(x_1) + a_2 f_2(x_1) - y_1 \\ a_1 f_1(x_2) + a_2 f_2(x_2) - y_2 \end{bmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} f_1(x_0) & f_2(x_0) \\ f_1(x_1) & f_2(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\|^2$$

e quindi, posto:

$$A = \begin{bmatrix} f_1(x_0) & f_2(x_0) \\ f_1(x_1) & f_2(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

si ha infine:

$$SQ(f) = \|Ax - b\|^2$$

- (3.15) Osservazione.

Il sistema  $Ax = b$  ottenuto nell'esempio precedente è *il sistema che traduce le condizioni di interpolazione*  $f(x_0) = y_0$ ,  $f(x_1) = y_1$ ,  $f(x_2) = y_2$ .

---

2 Per alleggerire la notazione, per ogni  $v \in \mathbb{R}^n$ , in questa parte indicheremo con  $\|v\|$  la norma due di  $v$ .