Lezione 24 (ore 48,49) - 19 novembre 2025, 11:30 - 13:30 A13

(2.83) Osservazione (criteri d'arresto).

Siano $A \in R^{n \times n}$ invertibile e $b \in R^n$ non zero. Si utilizza il metodo iterativo convergente definito da $H \in R^{n \times n}$ e $c \in R^n$ per approssimare la soluzione x^* del sistema $A x = b$. Scelto $g \in R^n$, il metodo iterativo genera la successione $x(k)$, convergente ad x^*. Descriviamo due possibili criteri d'arresto.

(a) Assegnato $E > 0$ e posto $r(k) = b - A x(k)$ (vettore residuo associato ad $x(k)$):

$$\underline{\text{se}}\ \| r(k) \| \,/\, \| b \| < E\ \underline{\text{allora}}\ \text{STOP}$$

- Il criterio è *calcolabile*;
- Il criterio è *efficace* (infatti: se $x(k) \to x^*$ allora $x(k) - x^* \to 0$ e quindi $r(k) = A (x^* - x(k)) \to 0$);
- Quando il criterio è verificato si ha, interpretando $x(k)$ come soluzione del sistema perturbato $A x = b - r(k)$ ed utilizzando i risultati della teoria del condizionamento:

$$\| x(k) - x^* \| \,/\, \| x^* \| \leqslant c(A) \, \| r(k) \| \,/\, \| b \| < c(A)\, E$$

  Il criterio risulta dunque di *tipo relativo*. Si osservi che se il numero di condizionamento di A è molto grande, l'approssimazione restituita può non essere accurata quanto richiesto dall'utilizzatore.

(b) Assegnato $E > 0$:

$$\underline{\text{se}}\ \| x(k) - x(k-1) \| < E\ \underline{\text{allora}}\ \text{STOP}$$

- Il criterio è *calcolabile*;
- Il criterio è *efficace* (infatti: se $x(k) \to x^*$ allora $x(k-1) - x^* \to 0$ e quindi $x(k) - x(k-1) \to 0$);
- Quando il criterio è verificato: se $\| H \| < 1$ allora, posto $F(H) = \| H \| \,/\, (1 - \| H \|)$ si ha:[1]

$$\| x(k) - x^* \| \leqslant F(H) \, \| x(k) - x(k-1) \| < F(H)\, E$$

  Il criterio risulta dunque di *tipo assoluto*. Si osservi che se $\| H \|$ vale poco meno di uno allora $F(H)$ è molto grande e l'approssimazione restituita può non essere accurata quanto richiesto dall'utilizzatore.

(2.84) Esercizio (per casa).

Scrivere una function *Scilab*, di intestazione

x = GaussSeidel(A,b,E)

che, dopo aver verificato che gli elementi sulla diagonale di A sono tutti diversi da zero, applica il metodo di Gauss-Seidel al sistema $A x = b$ utilizzando come criterio d'arresto

1 Dimostrazione omessa.

quello esposto in (b) dell'Osservazione (2.83).

(3) INTERPOLAZIONE E MINIMI QUADRATI

(3.01) Problema.

Siano assegnate k+1 coppie di numeri reali (dette *dati*):

$$(x_0,y_0)\ ,\ \dots\ ,\ (x_k,y_k)$$

con $x_0,\dots,x_k$ *distinti*, e un sottospazio vettoriale F dello spazio vettoriale su R delle funzioni continue da $I \subset R$ in R tale che:

$$\dim F = m$$

- Il *problema dell'interpolazione* consiste nel determinare gli elementi $g \in F$ tali che:

  $$g(x_0) = y_0\ ,\ \dots\ ,\ g(x_k) = y_k$$

  Ciascuno degli elementi g che verifica le condizioni si chiama un elemento di F che *interpola i dati*.

  La condizione che $x_0,\dots,x_k$ siano distinti è *necessaria* affinché il problema dell'interpolazione possa avere *almeno una* soluzione.

- Sia $m < k+1$. Il *problema dei minimi quadrati* consiste nel determinare gli elementi $g \in F$ punti di *minimo assoluto* della funzione $SQ: F \to R$ definita da:

  $$SQ(f) = (f(x_0) - y_0)^2 + \dots + (f(x_k) - y_k)^2$$

  Ciascuno degli elementi g che verifica la condizione si chiama *un elemento di* F *che meglio approssima i dati nel senso dei minimi quadrati.*

  Si osservi che in questo problema *non si richiede* la condizione che $x_0,\dots,x_k$ siano distinti.

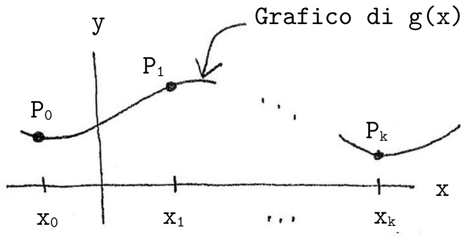
(3.02) Osservazione (interpretazione geometrica dei due problemi).

Si rappresentino in un piano cartesiano i k+1 punti:[2]

$$P_0 \equiv (x_0,y_0),\ \dots\ ,P_k \equiv (x_k,y_k)$$

Il problema dell'interpolazione consiste nel *determinare gli elementi* $g \in F$ *il cui grafico contiene tutti i* k+1 *punti* (vedere la figura seguente).

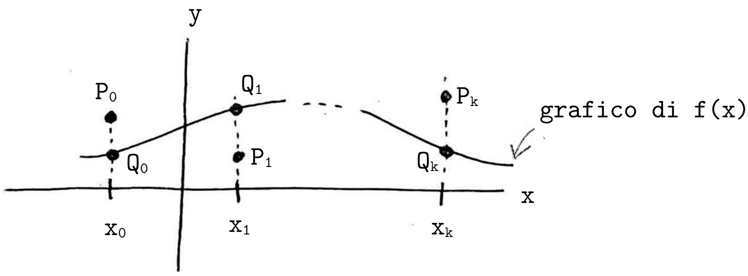
2 Assegnato un piano cartesiano, la scrittura $P \equiv (x,y)$ significa che la coppia di numeri reali (x,y) costituisce le *coordinate* del punto P del piano.



Per ogni $f \in F$, siano:

$$Q_0 \equiv (x_0, f(x_0)),\ \dots\ , Q_k \equiv (x_k, f(x_k))$$

Il valore SQ(f) è *la somma dei quadrati delle lunghezze dei segmenti* P_0Q_0, ... ,P_kQ_k. Questo valore può essere pensato come 'distanza' del grafico di f dai dati (vedere la figura seguente).



(3.03) <u>Esempio</u> (riformulazione del problema dell'interpolazione).

Si considerino i dati (k = 2): $(x_0,y_0),(x_1,y_1),(x_2,y_2)$, con x_0,x_1,x_2 distinti, e lo spazio vettoriale $F = \text{span}\{ f_1(x),f_2(x) \} = \{ a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) \text{ con } a_1,\ a_2 \in R \}$. Le condizioni di interpolazione:

$$g(x_0) = y_0\ ,\ g(x_1) = y_1\ ,\ g(x_2) = y_2$$

si riscrivono (utilizzando l'espressione di g(x) in termini dei generatori $f_1(x),f_2(x)$):

$$a_1 f_1(x_0) + a_2 f_2(x_0) = y_0\ ,\ a_1 f_1(x_1) + a_2 f_2(x_1) = y_1\ ,\ a_1 f_1(x_2) + a_2 f_2(x_2) = y_2$$

Dunque:

$$g(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) \text{ interpola i dati}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \text{ è soluzione del sistema } \begin{bmatrix} f_1(x_0) & f_2(x_0) \\ f_1(x_1) & f_2(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Il sistema ha *tante equazioni quanti sono i dati da interpolare, tante incognite quanti sono i generatori di* F *assegnati.*

(3.04) <u>Osservazione</u> (interpolazione polinomiale).

Si considerino i dati: $(x_0,y_0),\dots,(x_k,y_k)$, con $x_0,\dots,x_k$ distinti, e lo spazio vettoriale F =

$P_k(R)$.[3] Si osservi che in questo caso la dimensione di F è *uguale* al numero di dati. Il problema di determinare gli elementi di $P_k(R)$ che interpolano i dati si chiama *problema dell'interpolazione polinomiale*. Per studiare il problema si introduce una base in $P_k(R)$. La scelta della base influisce sulla forma del sistema da risolvere e sull'espressione degli eventuali elementi di F determinati. Vediamo tre possibili scelte.

(1) Si consideri la base:

$$1, x, x^2, \dots, x^k$$

detta *base di Vandermonde* di $P_k(R)$. Il sistema che traduce le condizioni di interpolazione è:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_k & \dots & x_k^k \end{bmatrix} c = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix}$$

la cui matrice si chiama *matrice di Vandermonde*. Se $c^* = (c_0, \dots, c_k)^t$ è una soluzione del sistema, il polinomio:

$$p_k(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_k x^k$$

interpola i dati e l'espressione ottenuta si chiama *forma di Vandermonde* del polinomio.

(2) Si consideri la base:

$$1, (x - x_0), (x - x_0)(x - x_1), \dots, (x - x_0)\cdots(x - x_{k-1})$$

detta *base di Newton* di $P_k(R)$. Si verifica facilmente che il sistema che traduce le condizioni di interpolazione, ad esempio nel caso k = 3, è:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_1-x_0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2-x_0 & (x_2-x_0)(x_2-x_1) & 0 \\ 1 & x_3-x_0 & (x_3-x_0)(x_3-x_1) & (x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2) \end{bmatrix} c = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

La matrice del sistema è *triangolare inferiore* e invertibile (si ricordi che i numeri $x_0, \dots, x_k$ sono distinti). La base di Newton è *costruita appositamente* affinché la matrice del sistema risulti triangolare inferiore. Se $c^* = (c_0, \dots, c_k)^t$ è una soluzione del sistema, il polinomio:

$$p_k(x) = c_0 + c_1 (x - x_0) + \cdots + c_k (x - x_0)\cdots(x - x_{k-1})$$

interpola i dati e l'espressione ottenuta si chiama *forma di Newton* del polinomio.

(3) Si considerino i k+1 elementi di $P_k(R)$ definiti da:

3 Si indica con $P_k(R)$ lo spazio vettoriale su R dei polinomi a coefficienti reali di grado *al più* k.

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)\cdots(x-x_k)}{(x_0-x_1)\cdots(x_0-x_k)}, \; l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_k)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_k)}, \ldots, \; l_k(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})}$$

Questi elementi sono costruiti in modo tale che per $i = 0,\ldots,k$ si abbia: $l_i(x_i) = 1$ e $l_i(x_j) = 0$ per $j \neq i$. Inoltre, sono elementi *linearmente indipendenti* di $P_k(R)$ (infatti: *se* $A(x) = a_0\, l_0(x) + \cdots + a_k\, l_k(x) = 0$ per ogni $x \in R$ *allora* per $i = 0,\ldots,k$ si ha: $A(x_i) = a_i = 0$) e quindi, poiché $\dim P_k(R) = k+1$, sono una *base* di $P_k(R)$, detta *base di Lagrange* di $P_k(R)$.

Si verifica facilmente che il sistema che traduce le condizioni di interpolazione è:

$$c = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix}$$

infatti la matrice del sistema è la *matrice identità*. La base di Lagrange è *costruita appositamente* affinché accada questo. Infine, il polinomio:

$$p_k(x) = y_0\, l_0(x) + \cdots + y_k\, l_k(x)$$

interpola i dati e l'espressione ottenuta si chiama *forma di Lagrange* del polinomio.

(3.05) <u>Teorema</u> (esistenza ed unicità del polinomio interpolante)

Assegnati i dati: $(x_0,y_0),\ldots,(x_k,y_k)$, con $x_0,\ldots,x_k$ distinti, esiste *un solo* elemento $p(x) \in P_k(R)$ che li interpola. Il polinomio $p(x)$ si chiama *il polinomio interpolante*.

(<u>Dimostrazione</u>. Per quanto mostrato nel punto (3) dell'osservazione precedente, esiste una sola combinazione lineare degli elementi della base di Lagrange che interpola i dati. Dunque esiste un solo elemento di $P_k(R)$ che interpola i dati.)

(3.06) <u>Osservazione</u>.

Per risolvere un problema di interpolazione polinomiale si *sceglie* una base di $P_k(R)$, si determina *la* soluzione del sistema che traduce le condizioni di interpolazione e si individua *la* combinazione lineare degli elementi della base scelta che interpola i dati. A seconda della base scelta si ottiene una *forma diversa dell'unico polinomio interpolante*.

(3.07) <u>Esercizio</u> (per casa).

Si risolvano i seguenti problemi, *nessuno dei quali è di interpolazione polinomiale* (perché?).

(1) Assegnati i dati (-1,1), (0,0), (1,0), determinare gli elementi $g \in P_1(R)$ che interpolano i dati.
(2) Assegnati i dati (-1,0), (0,0), (1,0), determinare gli elementi $g \in P_1(R)$ che interpolano i dati.
(3) Assegnato il dato (0,0), determinare gli elementi $g \in P_1(R)$ che interpolano i dati.