Lezione 22 (ore 43,44) - 13 novembre 2025, 8:30 - 10:30 F3

(2.59) Esempio (numeri di macchina di Scilab).

In *Scilab* l'insieme dei numeri di macchina è:

$$M = F_d(2,53,-1021,1024)$$

ovvero l'insieme dei numeri in virgola mobile, base due, precisione 53, *esponente limitato* (tra -1021 e 1024) e *con elementi denormalizzati*.

Gli elementi di M sono:

- zero;
- gli *elementi normalizzati*:

$$(-1)^s\ 2^b\ 0.c_1...c_{53}$$

  con $s \in \{0,1\}$, $-1021 \leqslant b \leqslant 1024$, ogni c_k cifra in base due e $c_1 \neq 0$;
- gli *elementi denormalizzati*:

$$(-1)^s\ 2^{-1024}\ 0.c_1...c_{53}$$

  con $s \in \{0,1\}$, ogni c_k cifra in base due e $c_1 = 0$.

L'insieme M ha un numero *finito* di elementi. Inoltre:

- $\max M = \xi_{max} = 2^{1024}\, 0.1\cdots1 = 2^{1024}\,(1 - 2^{-53})$
- $\min\{\ \xi \in M,\ \xi > 0\ \} = \xi_{min} = 2^{-1021}\, 0.0\cdots01 = 2^{-1021}\, 2^{-53} = 2^{-1074}$
- il *successore di zero* è definito e: $\sigma(0) = \xi_{min}$
- $\min\{\ \xi \in M,\ \xi > 0$ e ξ normalizzato $\} = 2^{-1021}\, 0.10\cdots0 = 2^{-1021}\, 2^{-1} = 2^{-1022}$
- M contiene *elementi simbolici*: Nan (utilizzato quando al risultato di una funzione predefinita non è assegnabile un valore numerico 'sensato'), Inf (quando una funzione predefinita restituisce un valore numerico positivo 'troppo grande'), -Inf (quando una funzione predefinita restituisce un valore numerico negativo 'troppo grande'); in *Scilab* le costanti %nan e %inf hanno valore, rispettivamente, Nan e Inf
- detta $rd: R \to M$ l'usuale funzione arrotondamento in M, la funzione $rd^*: R \to M$ che *Scilab* utilizza per arrotondare i numeri reali è definita così:

  se $|rd(x)| \leqslant \xi_{max}$ allora $rd^*(x) = rd(x)$

  se $rd(x) > \xi_{max}$ allora $rd^*(x) = Inf$

  se $rd(x) < -\xi_{max}$ allora $rd^*(x) = -Inf$

La funzione predefinita *number_properties* di *Scilab* restituisce informazioni sull'insieme M. Precisamente:

number_properties(<stringa>)

restituisce:

- la *base* dell'insieme M quando <stringa> = 'radix'
- la *precisione* dell'insieme M quando <stringa> = 'digits'

- l'*esponente minimo* dell'insieme M quando <stringa> = 'minexp'
- l'*esponente massimo* dell'insieme M quando <stringa> = 'maxexp'
- la presenza di *elementi denormalizzati* quando <stringa> = 'denorm'
- il *massimo* elemento di M quando <stringa> = 'huge'
- il *minimo* elemento *positivo* di M quando <stringa> = 'tiniest'
- il *minimo* elemento *positivo normalizzato* di M quando <stringa> = 'tiny'
- la *precisione di macchina* in M quando <stringa> = 'eps'

La funzione predefinita *log2* di Scilab restituisce la frazione e l'esponente di un elemento di M. Precisamente, se $\xi = (-1)^s\, 2^b\, g$, l'assegnamento:

$$[f,e] = \log2(\xi)$$

assegna ad f il valore $(-1)^s\, g$ e ad e il valore b.

La funzione predefinita *nearfloat* di Scilab restituisce il predecessore o il successore di un elemento di M. Precisamente:

nearfloat(<stringa>,ξ)

restituisce:

- il *successore* di ξ quando <stringa> = 'succ'
- il *predecessore* di ξ quando <stringa> = 'pred'

(2.60) Esercizio (per casa).

Eseguire e discutere (utilizzando opportune rappresentazioni grafiche) i seguenti dialoghi in *Scilab*:

```
> xi_min = number_properties('tiniest')
> xi_min == 2^(-1074)
> [f,e] = log2(xi_min)
> y = xi_min / 2
> y == 0
> z = 2^(-1075) * (3 / 2)
> z == 0
> z = xi_min * (3 / 4)
> z == xi_min
> xi_max = number_properties('huge')
> [f,e] = log2(xi_max)
> f == 1 - 2^(-53)
> xi_max + 2^971[1]
> nearfloat('succ',xi_max)
> xi_max + 2^970
> xi_max + 2^969 == xi_max
```

(2.61) Esercizio (per casa).

La funzione predefinita *bitstring* di *Scilab* restituisce la stringa di cifre in base due che rappresenta la codifica usuale di un numero di macchina nel calcolatore. Consultare la pagina di Wikipedia: Double-precision floating-point format per 'decifrare' il risultato

---

1 La distanza tra xi_max e il suo successore in F(2,53) è $2^{1024-53} = 2^{971}$.

del seguente dialogo in *Scilab*:

```
> bitstring(1)
> bitstring(xi_min)
> bitstring(0)
> bitstring(%inf)
```

(2.62) Osservazione.

In generale, assegnata $H \in R^{n \times n}$ tale che $I - H$ invertibile e posto:

$$C = \{ g \in R^n \text{ tali che } x(k) \text{ è convergente}\}$$

sussiste una ed una sola delle seguenti eventualità:

(1) C ha *un solo* elemento (la soluzione del sistema $(I - H)\, x = c$)

(2) C è *un sottospazio vettoriale di* R^n *di dimensione* $\leqslant n$ (determinato dagli autovettori di H)

(3) $C = R^n$

Se sussiste uno dei casi (1) o (2), è *praticamente impossibile* determinare g tale che la successione x(k) risulti convergente: il metodo *non è utilizzabile* per approssimare la soluzione di $A\, x = b$.

Se sussiste il caso (3), qualunque g genera una successione convergente alla soluzione del sistema $A\, x = b$: il metodo *è utilizzabile* per approssimare la soluzione di $A\, x = b$.

(2.63) Definizione (metodo convergente).

Siano $H \in R^{n \times n}$ e $c \in R^n$. *Il metodo* iterativo definito da H e c *è convergente* se:

(1) per ogni $g \in R^n$, *la successione* x(k) generata dal metodo a partire da g *è convergente*;

(2) tutte le successioni generate dal metodo hanno *lo stesso limite*.

(2.64) Osservazione.

Nel caso (usuale) in cui il metodo iterativo sia utilizzato per approssimare la soluzione del sistema $A\, x = b$ con A invertibile, i sistemi $A\, x = b$ e $(I - H)\, x = c$ sono equivalenti, e quindi il metodo definito da H e c ha *un solo punto unito*. In questo caso (si veda l'Osservazione (2.57) della Lezione 21) si ha che (1) $\Rightarrow$ (2), ovvero: metodo convergente significa che tutte le successioni generate dal metodo sono convergenti.

(2.65) Definizione (spettro e raggio spettrale).

Sia $A \in R^{n \times n}$. Si chiama *spettro di* A l'insieme degli autovalori di A:

$$\sigma(A) = \{ \lambda \in C \text{ tali che } \lambda \text{ è autovalore di } A \}$$

Si chiama *raggio spettrale di* A il numero:

$$\rho(A) = \max \{ \ |\lambda| \text{ tali che } \lambda \text{ è autovalore di A } \}$$[2]

(2.66) Teorema (caratterizzazione dei metodi convergenti).

Siano $H \in R^{n\times n}$ e $c \in R^n$. Il metodo iterativo definito da H e c è convergente *se e solo se* $\rho(H) < 1$.

(2.67) Esempi.

(1) Siano $H = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, c = 0 e $g \in R^2$. La successione generata dal metodo iterativo definito da H e c a partire da g è:

$$x(k) = H^k g = \begin{bmatrix} (1/2)^k & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1/2)^k g_1 \\ (-1)^k g_2 \end{bmatrix}$$

La successione è convergente (all'unico punto unito del metodo: 0) se e solo se $g_2 = 0$. Dunque il metodo *non è* convergente. Infatti: $\sigma(H) = \{ 1/2, -1 \}$ e $\rho(H) = 1$.

(2) Siano $H = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, c = 0 e $g \in R^2$. La successione generata dal metodo iterativo definito da H e c a partire da g è:

$$x(k) = H^k g = \begin{bmatrix} (1/2)^k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1/2)^k g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}$$

La successione è convergente per ogni g e:

$$\lim_{k\to\infty} \begin{bmatrix} (1/2)^k g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g_2 \end{bmatrix}$$

Il valore del limite *dipende da* g, dunque il metodo *non è* convergente. Infatti: $\sigma(H) = \{ 1/2, 1 \}$ e $\rho(H) = 1$.

2 Si rappresentino gli autovalori di A, cioè $\sigma(A)$, sul piano di Gauss. Scelto un numero reale positivo r sufficientemente grande, l'insieme $I(0,r) = \{ z \in C : |z| \leqslant r \}$ - il cerchio di centro l'origine e raggio r - include $\sigma(A)$. Il raggio spettrale di A è il *minimo* valore di r tale che $I(0,r) \supset \sigma(A)$.