Lezione 21 (ore 41,42) - 12 novembre 2025, 11:30 - 13:30 A13

(2.55) Osservazione.

Analizziamo il costo del procedimento di soluzione del sistema $A\,x = b$, con $A \in R^{n \times n}$ invertibile, che utilizza la procedura EGPP. Le procedure eseguite sono EGPP, SA ed SI. Si ha:

$$C(EGPP) = \frac{2}{3}n^3 + \ldots \quad , \quad C(SA) = C(SI) = n^2$$

Si osservi che mentre nel calcolo di SA ed SI si eseguono *solo* operazioni aritmetiche, nel calcolo di EGPP si eseguono *anche* confronti, ma il loro numero è *trascurabile* rispetto a quello delle operazioni aritmetiche.[1]

(Esercizio: determinare il numero di confronti eseguito da EGPP.)

Complessivamente:

$$C(EGPP) + C(SA) + C(SI) = \frac{2}{3}n^3 + \ldots$$

Nel procedimento che utilizza la procedura qr si eseguono le procedure qr, prodotto matrice per colonna (indicato con: pmc) e SI. Si ha:

$$C(qr) = \frac{4}{3}n^3 + \ldots \quad , \quad C(pmc) = 2\,n^2 + \ldots \quad , \quad C(SI) = n^2$$

Si osservi che nella procedura qr (come in quella GS) si esegue anche il calcolo di radici quadrate ma il loro numero (n) è *trascurabile* rispetto a quello delle operazioni aritmetiche.

(Esercizio: determinare il numero di operazioni aritmetiche eseguito da pmc.)

Complessivamente:

$$C(qr) + C(pmc) + C(SI) = \frac{4}{3}n^3 + \ldots$$

Il termine dominante nel costo aritmetico della procedura che usa qr è dunque *doppio* rispetto a quello della procedura che usa EGPP.

---

1 Si può ragionevolmente ritenere che il tempo necessario per confrontare due numeri di macchina sia *simile* a quello necessario per eseguire un'operazione aritmetica sugli stessi numeri.

(2.4) METODI ITERATIVI PER LA SOLUZIONE DI UN SISTEMA DI EQUAZIONI LINEARI

(2.56) Definizione (metodo iterativo per la soluzione di un sistema di equazioni lineari).

Siano $H \in R^{n\times n}$ e $c \in R^n$. Il *metodo iterativo definito da* H *e* c è l'applicazione che a ciascun vettore $g \in R^n$ associa la successione di vettori x(k) definita da:

$$x(0) = g \quad , \quad x(k) = H\,x(k-1) + c \quad \text{per } k = 1,2,...$$

(2.57) Osservazione.

- Il metodo iterativo definito da H e c è il metodo iterativo definito dalla funzione $h\colon R^n \to R^n$ tale che:

  $$h(x) = H\,x + c$$

  La funzione h è *continua* perciò (si veda l'Osservazione (1.54) nella Lezione 8) se la successione x(k) generata dal metodo è convergente, allora il suo limite $v \in R^n$ è un punto unito di h, ovvero verifica la relazione:

  $$v = H\,v + c \quad \text{equivalente a} \quad (I - H)\,v = c$$

  e quest'ultima relazione significa che:

  v è *soluzione* del sistema di equazioni lineari $(I - H)\,x = c$

- Sia $A \in R^{n\times n}$ invertibile. Il metodo iterativo definito da H e c è *utilizzabile* per approssimare la soluzione del sistema $A\,x = b$ se:

  (1) i sistemi $A\,x = b$ e $(I - H)\,x = c$ sono *equivalenti* (in particolare: $I - H$ è invertibile) e

  (2) è (praticamente) possibile determinare $g \in R^n$ a partire dal quale la successione generata dal metodo è convergente.

(2.58) Esempio.

(1) Siano:

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Posto: $H = I - A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $c = b$, i sistemi $A\,x = b$ e $(I - H)\,x = c$ sono equivalenti;
- Sia $g = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}$. La successione generata dal metodo definito da H e c è allora:

  $$x(0) = g \quad , \quad x(1) = H\,x(0) + c = H\,g \quad , \quad x(2) = H\,x(1) + c = H^2\,g \quad , \quad ...$$

  e quindi:

$$x(k) = H^k g = \begin{bmatrix} (1/2)^k & 0 \\ 0 & 2^k \end{bmatrix} g = \begin{bmatrix} (1/2)^k g_1 \\ 2^k g_2 \end{bmatrix}$$

La successione è convergente *se e solo se* $g_2 = 0$. In tal caso si ha:

$$\lim_{k \to \infty} x(k) = 0$$

e la successione converge all'unica soluzione del sistema $A\,x = b$.

(2) Siano:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Posto: $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ si riscrive $A = 2\,I + J$. Allora:

$$A\,x = b \quad \text{è equivalente a} \quad x = -\,(1/2)\,J\,x + (1/2)\,b$$

ovvero, posto $H = -(1/2)\,J$ e $c = (1/2)\,b$:

$$A\,x = b \quad \text{è equivalente a} \quad (I - H)\,x = c$$

- Gli autovalori della matrice H sono: $\lambda_1 = -\,1/2$ e $\lambda_2 = 1/2$, quindi H è diagonalizzabile.[2] Si ha:

$$H = S \begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} S^{-1} \quad \text{con} \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- Posto $g = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}$, la successione generata dal metodo definito da H e c è:

$$x(k) = H^k g = S \begin{bmatrix} (-1/2)^k & 0 \\ 0 & (1/2)^k \end{bmatrix} S^{-1} g$$

ovvero, posto $y = S^{-1} g$:

$$x(k) = \begin{bmatrix} (-1/2)^k y_1 \\ (1/2)^k y_2 \end{bmatrix}$$

In questo caso si ha:

$$\text{per ogni } g \in R^2 : \lim_{k \to \infty} x(k) = 0$$

ovvero: per ogni $g \in R^2$ la successione converge all'unica soluzione del sistema $A\,x = b$.

2 Si ricordi che (1) una matrice $M \in R^{n \times n}$ è diagonalizzabile se esistono una matrice diagonale Λ e una matrice invertibile S tali che: $M\,S = S\,\Lambda$, ovvero $M = S\,\Lambda\,S^{-1}$; gli elementi $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ sulla diagonale di Λ sono gli autovalori di M, la k-esima colonna di S è un autovettore associato all'autovalore λ_k; (2) se una matrice ha autovalori distinti allora è diagonalizzabile.

(3) Siano $A = -I$ e $b = 0$.

- Posto $H = I - A$ e $c = b$, i sistemi $A\,x = b$ e $(I - H)\,x = c$ sono equivalenti.
- La successione generata dal metodo iterativo definito da H e c a partire da $g \in R^n$ è:

  $$x(k) = H^k\, g = 2^k\, g$$

  La successione è convergente *se e solo se* $g = 0$ e, in tal caso, converge all'unica soluzione del sistema $A\,x = b$.