Lezione 19 (ore 36,37) - 6 novembre 2025, 8:30 - 10:30 F3

(2.36) Esercizio (svolto in classe).

Siano $V = R^2$ con norma 2 e $v \in R^2$ tale che $\| v \|_2 = 2$.

- Sia $x^* = v$. Disegnare l'insieme degli $\hat{x}$ tali che $\varepsilon_x \leqslant 1/4$.
- Sia $x^* = v/2$. Disegnare l'insieme degli $\hat{x}$ tali che $\varepsilon_x \leqslant 1/4$.

(2.37) Esercizio (svolto in classe).

Siano $V = R^2$ con norma 2 e $v \in R^2$ tale che $\| v \|_2 = 2$.

- Sia $x^* = v$. Disegnare l'insieme degli $\hat{x}$ tali che $\| \delta x \|_2 \leqslant 1/2$.
- Sia $x^* = v/2$. Disegnare l'insieme degli $\hat{x}$ tali che $\| \delta x \|_2 \leqslant 1/2$.

(2.38) Esercizio.

In R^2 con norma 2 si siano: $x^* = [\ 2;\ 0,1]$ e $\hat{x}$ tali che $\varepsilon_x \leqslant L$. Determinare: $\max |\delta x_1 / x^*_1|$ e $\max |\delta x_2 / x^*_2|$.

Soluzione: $\varepsilon_x \leqslant L \Rightarrow \| \delta x \|_2 \leqslant L \| x^* \|_2$. Allora, per k = 1,2 si ha:

$$\max |\delta x_k / x^*_k| = \max |\delta x_k| / |x^*_k| = \max \| \delta x \|_2 / |x^*_k| \leqslant L \| x^* \|_2 / |x^*_k|$$

Dunque:

$$\max |\delta x_1 / x^*_1| \leqslant L \| x^* \|_2 / |x^*_1| = \mathrm{sqrt}(4 + 0.01) / 2 \approx L$$

e:

$$\max |\delta x_2 / x^*_2| \leqslant L \| x^* \|_2 / |x^*_2| = \mathrm{sqrt}(4 + 0.01) / 0,1 \approx 20\ L$$

Per la prima componente l'errore relativo ha una limitazione simile a quella dello scostamento; per la seconda, invece, la limitazione è *peggiore*. Questo accade perché mentre $\| x^* \|_2 / |x^*_1| \approx 1$, $\| x^* \|_2 / |x^*_2|$ è *molto maggiore* di 1.

(2.39) Osservazione.

Siano $A \in R^{n \times n}$ una matrice invertibile, $b \in R^n$, x^* la soluzione del sistema $A\,x = b$ e $\hat{x} \in R^n$. Si usa $\hat{x}$ per approssimare x^*. Ci si domanda quanto è accurata l'approssimazione. Scelta una norma in R^n, per misurare l'accuratezza si utilizza la quantità $N(\hat{x} - x^*)/N(x^*)$.

(A) Per ottenere informazioni sull'accuratezza, si introduce il vettore *residuo* del sistema $A\,x = b$ associato a $\hat{x}$ definito da:

$$r = A\,\hat{x} - b$$

e si *interpreta* $\hat{x}$ come soluzione del sistema perturbato:

$$A\,x = b + r$$

ottenuto con le perturbazioni $\delta A = 0$ e $\delta b = r$. Con questa interpretazione di $\hat{x}$ la quantità

$N(\hat{x} - x^*)/N(x^*)$ risulta essere la misura relativa ε_x dello scostamento della soluzione dovuto alla perturbazione. Applicando il Teorema di condizionamento (2.36) della Lezione 18 si ottiene la limitazione:

$$N(\hat{x} - x^*)/N(x^*) = \varepsilon_x \leqslant c_N(A)\,\varepsilon_b \quad \text{con} \quad \varepsilon_b = N(r)/N(b)$$

(B) Per ottenere informazioni sull'accuratezza, si cerca una matrice $M \in R^{n\times n}$ tale che:

$$M\,\hat{x} = -r$$

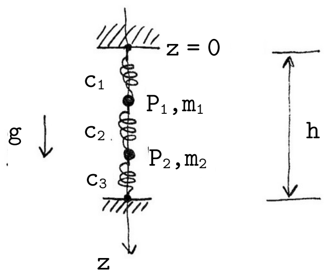
e, posto $\delta A = M$ si *interpreta* $\hat{x}$ come soluzione del sistema perturbato:

$$(A + \delta A)\,x = b$$

Con questa interpretazione di $\hat{x}$ la quantità $N(\hat{x} - x^*)/N(x^*)$ risulta essere la misura relativa ε_x dello scostamento della soluzione dovuto alla perturbazione. Se $c_N(A)\,\varepsilon_A < 1$, dal Teorema di condizionamento (2.36) della Lezione 18 si ottiene la limitazione:

$$N(\hat{x} - x^*)/N(x^*) = \varepsilon_x \leqslant c_N(A)\,\varepsilon_A \,/\, (1 - c_N(A)\,\varepsilon_A)$$

(2.40) Esempio.



Si consideri il sistema di figura, composto da due punti pesanti, P_1 di massa m_1, e P_2 di massa m_2, liberi di scorrere lungo una guida verticale e collegati da tre molle ideali e con lunghezza a riposo 0 come nel disegno.

Scelto l'asse z verticale discendente, per determinare le configurazioni di equilibrio, per ciascuno dei punti si scrivono le equazioni della statica:

$$m_1 g - c_1 z_1 + c_2 (z_2 - z_1) = 0$$
$$m_2 g - c_2 (z_2 - z_1) + c_3 (h - z_2) = 0$$

che, sotto forma di sistema, si riscrivono:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}}_{z} = \underbrace{\begin{bmatrix} m_1 g \\ m_2 g + c_3 h \end{bmatrix}}_{b}$$

Scelti i valori dei parametri:

$$c_1 = c_2 = c_3 = 100 \text{ N/m} \quad , \quad m_1 = m_2 = 1 \text{ kg} \quad , \quad h = 5 \text{ m} \quad , \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

la soluzione z^* del sistema è:

$$z_1^* \approx 1.76 \text{ m} \quad , \quad z_2^* \approx 3.43 \text{ m}$$

Se adesso assumiamo come valore dell'accelerazione di gravità un valore g' tale che:[1]

$$|g' - g| = |\,\delta g\,| < 10^{-2}$$

1 Si ricordi che il valore dell'accelerazione di gravità è noto solo con approssimazione.

il sistema $A\,z = b$ si trasforma nel *sistema perturbato* $A\,z = b + \delta b$ con:

$$\delta b = [\ m_1\,\delta g\ ;\ m_2\,\delta g\ ]$$

Scelta poi la *norma uno* in R^2 si ha:

$$\varepsilon_b = N_1(\delta b)/N_1(b) < 4 \times 10^{-5} \qquad e \qquad c_1(A) = 3$$

In base al Teorema di condizionamento, per lo scostamento della soluzione $\hat{z}$ del sistema perturbato dalla soluzione z^* si ha la limitazione:

$$\varepsilon_x \leqslant c_N(A)\,\varepsilon_b < 1.2 \times 10^{-4}$$

Infine, essendo:

$$\|\ z^*\ \|_1\ /\ |z_1^*| \approx 3 \qquad e \qquad \|\ z^*\ \|_1\ /\ |z_2^*| \approx 1.5$$

si ottengono *stime simili* anche per quanto riguarda lo scostamento delle componenti (vedere l'Esercizio (2.38)).