Lezione 18 (ore 34,35) - 5 novembre 2025, 11:30 - 13:30 A13

(2.25) Definizione (norma in uno spazio vettoriale).

Sia V uno spazio vettoriale su R. Una funzione $N:V \to R$ è una *norma* in V se verifica le seguenti condizioni:

(1) per ogni $v \in V$, $N(v) \geqslant 0$ e $N(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$;
(2) per ogni $v \in V$ ed ogni $\alpha \in R$ si ha: $N(\alpha v) = |\alpha| N(v)$;
(3) per ogni $v,w \in V$ si ha: $N(v + w) \leqslant N(v) + N(w)$.

La coppia V,N si chiama *spazio normato*.

(2.26) Esempio (norme usuali in R^n).

Siano $V = R^n$ e $v = [v_1,...,v_n] \in V$. Le funzioni:

- $N_1:R^n \to R$ definita da $N_1(v) = |v_1| + ... + |v_n|$
- $N_2:R^n \to R$ definita da $N_2(v) = \text{sqrt}(v_1^2 + ... + v_n^2)$
- $N_\infty:R^n \to R$ definita da $N_\infty(v) = \max\{ |v_1|,...,|v_n| \}$

sono norme in R^n.

(2.27) Esercizio (per casa).

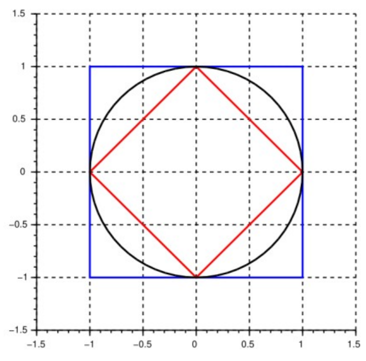
Dimostrare che le funzioni N_1 ed N_∞ verificano le proprietà della Definizione (2.25).

(2.28) Definizione (intorno sferico).

Siano R^n,N uno spazio normato, $v \in R^n$ e $r \in R$. L'insieme:

$$I_N(v,r) = \{ x \in R^n \text{ tali che } N(x - v) \leqslant r \}$$

si chiama *intorno sferico di centro* v *e raggio* r. Nella figura seguente sono rappresentati in nero l'intorno $I_2(0,1)$, in blu $I_\infty(0,1)$, in rosso $I_1(0,1)$, nel caso n = 2.



(2.29) Definizione (norma di matrice).

Siano R^n,N uno spazio normato e $A \in R^{n \times n}$. La quantità:

$$\| A \|_N = \max\{ N(A\,v),\ N(v) = 1 \}$$

si chiama *norma* N *di* A.

(2.30) Proprietà (della norma di matrice).

(I) Si osservi che la norma N di A è ben definita: il sottoinsieme S dei vettori v di R^n definito da N(v) = 1 è *chiuso e limitato* e la funzione $v \to N(A\,v)$ è *continua*. Per il Teorema di Weierstrass, quest'ultima *ha massimo e minimo* su S. In particolare:

$$\text{esiste } y \in R^n \text{ tale che } N(y) = 1 \text{ e } \| A \|_N = N(A\,y)$$

(IIa) Per ogni $A \in R^{n\times n}$ e $v \in R^n$ si ha:

$$N(A\,v) \leqslant \| A \|_N\, N(v)$$

Infatti: La relazione è certamente vera se v = 0. Se $v \neq 0$ si ha:

$$N(A\,v) = N(\ A\,N(v)\,\mathrm{vers}(v)\ )^{1} = N(\ N(v)\,A\,\mathrm{vers}(v)\ ) = N(v)\,N(A\,\mathrm{vers}(v))$$

Inoltre, per la definizione di norma N di A: $N(A\,\mathrm{vers}(v)) \leqslant \| A \|_N$, dunque:

$$N(A\,v) \leqslant \| A \|_N\, N(v)$$

(IIb) Esiste $w \in R^n$ tale che:

$$N(A\,w) = \| A \|_N\, N(w)$$

Per la proprietà (I), esiste $y \in R^n$ tale che N(y) = 1 e $\| A \|_N = N(A\,y)$. Se vers(w) = y si ha l'asserto.

(III) Per ogni $A,B \in R^{n\times n}$ si ha:

$$\| A\,B \|_N \leqslant \| A \|_N \| B \|_N$$

Infatti: per la proprietà (I) esiste $y \in R^n$ tale che N(y) = 1 e $\| A\,B \|_N = N(A\,B\,y)$. Allora, utilizzando due volte la proprietà (II):

$$\| A\,B \|_N = N(A\,B\,y) \leqslant \| A \|_N\, N(B\,y) \leqslant \| A \|_N \| B \|_N\, N(y) = \| A \|_N \| B \|_N$$

---

1 Siano R^n,N uno spazio normato e $v \in R^n$ un vettore non nullo. Allora:

$$\mathrm{vers}(v) = \frac{1}{N(v)}\, v$$

è il *versore* di v. Ovviamente si ha N(vers(v)) = 1.

(2.31) Osservazione.

L'insieme $R^{n\times n}$ è, con le usuali operazioni di somma di matrici e multiplo, uno spazio vettoriale su R. Introdotta in R^n una norma N, la funzione $A \to \| A \|_N$ da $R^{n\times n}$ in R *è una norma in* $R^{n\times n}$ (questo spiega il nome dato alla funzione). Dunque, sussistono le proprietà della norma (Definizione (2.25)):

(1) per ogni $A \in R^{n\times n}$, $\| A \|_N \geqslant 0$ e $\| A \|_N = 0 \Leftrightarrow A = 0$;
(2) per ogni $A \in R^{n\times n}$ ed ogni $\alpha \in R$ si ha: $\| \alpha A \|_N = |\alpha| \, \| A \|_N$;
(3) per ogni $A,B \in R^{n\times n}$ si ha: $\| A + B \|_N \leqslant \| A \|_N + \| B \|_N$.

(2.32) Osservazione (formule di calcolo della norma di una matrice).

Sia $A \in R^{n\times n}$ e siano $a_1,...,a_n$ le colonne di A. Si ha:

- $\| A \|_1 = \max\{ N_1(a_1),...,N_1(a_n) \}$
- $\| A \|_2$ = sqrt(massimo degli autovalori di A^tA)[2]
- $\| A \|_\infty = \| A^t \|_1$ ovvero, dette $r_1,...,r_n$ le *righe* di A: $\| A \|_\infty = \max\{ N_1(r_1),...,N_1(r_n) \}$

Si osservi che mentre il calcolo di $\| A \|_1$ e $\| A \|_\infty$ è elementare, quello di $\| A \|_2$ in generale *non lo è*.

(2.33) Esempio (condizionamento nel caso $\delta A = 0$, $\delta b \neq 0$).

Torniamo al condizionamento della soluzione del sistema $A x = b$. Sia N una norma in R^n.

Supponiamo che sia $\delta A = 0$ e $\delta b \neq 0$. Allora i vettori x^* e $\hat{x}$ verificano:

$$A x^* = b \quad , \quad A \hat{x} = b + \delta b$$

perciò, ricordando l'invertibilità di A, per lo scostamento δx si ha:

$$\delta x = \hat{x} - x^* = A^{-1} (b + \delta b) - A^{-1} b = A^{-1} \delta b$$

Introducendo la *misura assoluta* dello scostamento $N(\delta x)$ e quella della perturbazione $N(\delta b)$, utilizzando la proprietà (IIa) si ottiene:

$$\forall \ \delta b \ , \ N(\delta x) = N(A^{-1} \delta b) \leqslant \| A^{-1} \|_N N(\delta b)$$

La precedente è la *migliore limitazione possibile* per la misura assoluta dello scostamento in funzione della misura assoluta della perturbazione. La proprietà (IIb) mostra infatti che:

$$\exists \ \delta b \ : \ N(\delta x) = \| A^{-1} \|_N N(\delta b)$$

Se $b \neq 0$ (e quindi $x^* \neq 0$), possiamo introdurre anche le *misure relative* dello scostamento $\varepsilon_x = N(\delta x)/N(x^*)$ e della perturbazione $\varepsilon_b = N(\delta b)/N(b)$. Per tali misure si ha:

2 La matrice A^tA è *simmetrica* e *semidefinita positiva*. I suoi autovalori sono tutti non negativi.

$$\varepsilon_x = \frac{N(\delta x)}{N(x^*)} \leqslant \frac{\| A^{-1} \|_N \, N(\delta b)}{N(x^*)}$$

Ma:

$$A x^* = b \;\Rightarrow\; N(b) = N(A x^*) \leqslant \| A^{-1} \|_N \, N(x^*) \;\Rightarrow\; \frac{1}{N(x^*)} \leqslant \frac{\| A^{-1} \|_N}{N(b)}$$

da cui:

$$\forall \; \delta b \;,\; \forall \; b \neq 0 \;:\; \varepsilon_x \leqslant \| A^{-1} \|_N \, \| A \|_N \; \varepsilon_b$$

La precedente è la *migliore limitazione possibile* per la misura relativa dello scostamento in funzione della misura relativa della perturbazione. La proprietà (IIb) mostra infatti che:

$$\exists \; \delta b \text{ e } \exists \; b \neq 0 \;:\; \varepsilon_x = \| A^{-1} \|_N \, \| A \|_N \; \varepsilon_b$$

(2.34) <u>Definizione</u> (numero di condizionamento di una matrice).

Sia $A \in R^{n \times n}$ una matrice *invertibile* e N una norma in R^n. Il numero:

$$c_N(A) = \| A^{-1} \|_N \, \| A \|_N$$

si chiama *numero di condizionamento di* A (in norma N).

(2.35) <u>Osservazione</u>.

Poiché $A^{-1} A = I$, si ha (usando la proprietà (III) di (2.30)):

$$\| I \|_N = \| A^{-1} A \|_N \leqslant \| A^{-1} \|_N \, \| A \|_N$$

Per definizione si ha poi:

$$\| I \|_N = \max\{ N(I v),\; N(v) = 1 \} = \max\{ N(v),\; N(v) = 1 \} = 1$$

e quindi:

$$c_N(A) = \| A^{-1} \|_N \, \| A \|_N \geqslant 1$$

(2.36) <u>Teorema</u> (di condizionamento).

Siano $A \in R^{n \times n}$ una matrice *invertibile* e N una norma in R^n. Allora: per ogni $b \neq 0$, ogni δb tale che $b + \delta b \neq 0$ e ogni δA tale che $c_N(A)\, \varepsilon_A < 1$ si ha:

$$\varepsilon_x \leqslant \frac{c_N(A)}{1 - c_N(A)\, \varepsilon_A} (\varepsilon_A + \varepsilon_b)$$