Lezione 17 (ore 31,33) - 04 novembre 2025, 15:30 - 18:30 F3

(2.12) Esempio.

Calcolo di EGP(A) con:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

(*) $A_1 = A$;

(*) $k = 1$; $A_1(1,1) \neq 0 \Rightarrow P_1 = I$; $T_1 = P_1 A_1$;

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda_3 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda_4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

I valori $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ sono determinati dalla richiesta che nella matrice $H_1 T_1$ gli elementi di posto (2,1),(3,1) e (4,1) - ovvero gli elementi della k-esima colonna al di sotto della diagonale - siano *uguali a zero*:

$$\lambda_2 T_1(1,1) + T_1(2,1) = 0 \quad ; \quad \lambda_3 T_1(1,1) + T_1(3,1) = 0 \quad ; \quad \lambda_4 T_1(1,1) + T_1(4,1) = 0$$

Tenuto conto che $T_1(1,1) \neq 0$, i valori $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ sono *univocamente determinati*:

$$\lambda_2 = -\frac{T_1(2,1)}{T_1(1,1)} = -2 \quad ; \quad \lambda_3 = -\frac{T_1(3,1)}{T_1(1,1)} = 2 \quad ; \quad \lambda_4 = -\frac{T_1(4,1)}{T_1(1,1)} = 1$$

Infine:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{H_1} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}}_{T_1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}}_{A_2}$$

(*) $k = 2$; $A_2(2,2) = 0 \Rightarrow$ essendo $A_2(3,2) \neq 0$, scambio la seconda riga con la terza: $P_2 = P_{2,3}$;

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P_{2,3}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}}_{A_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}}_{T_2}$$

Si ha così $T_2(2,2) \neq 0$.

Poi:

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0; \\ 0, & 1, & 0, & 0; \\ 0, & \lambda_3, & 1, & 0; \\ 0, & \lambda_4, & 0, & 1 \end{bmatrix}$$

I valori λ_3,λ_4 sono determinati dalla richiesta che nella matrice $H_2\,T_2$ gli elementi di posto (3,2), e (4,2) - ovvero gli elementi della k-esima colonna al di sotto della diagonale - siano *uguali a zero*:

$$\lambda_3\,T_2(2,2) + T_2(3,2) = 0 \quad ; \quad \lambda_4\,T_2(2,2) + T_2(4,2) = 0$$

Tenuto conto che $T_2(2,2) \neq 0$, i valori λ_3,λ_4 sono *univocamente determinati*:

$$\lambda_3 = -\frac{T_2(3,2)}{T_2(2,2)} = 0 \quad ; \quad \lambda_4 = -\frac{T_2(4,2)}{T_2(2,2)} = -1$$

Infine:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0; \\ 0, & 1, & 0, & 0; \\ 0, & 0, & 1, & 0; \\ 0, & -1, & 0, & 1 \end{bmatrix}}_{H_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1, & 1, & 0, & 0; \\ 0, & 2, & 0, & -1; \\ 0, & 0, & 1, & 0; \\ 0, & 2, & 2, & -1 \end{bmatrix}}_{T_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1, & 1, & 0, & 0; \\ 0, & 2, & 0, & -1; \\ 0, & 0, & 1, & 0; \\ 0, & 0, & 2, & 0 \end{bmatrix}}_{A_3}$$

(*) $k = 3$; $A_3(3,3) \neq 0 \Rightarrow P_3 = I$; $T_3 = A_3$;

$$H_3 = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0; \\ 0, & 1, & 0, & 0; \\ 0, & 0, & 1, & 0; \\ 0, & 0, & \lambda_4, & 1 \end{bmatrix}$$

Il valore λ_4 è determinato dalla richiesta che nella matrice $H_3\,T_3$ l'elemento di posto (4,3) - ovvero gli elementi della k-esima colonna al di sotto della diagonale - sia *uguale a zero*:

$$\lambda_4\,T_3(3,3) + T_3(4,3) = 0$$

Tenuto conto che $T_3(3,3) \neq 0$, il valore λ_4 è *univocamente determinato*:

$$\lambda_4 = -\frac{T_3(4,3)}{T_3(3,3)} = -2$$

Infine:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0; \\ 0, & 1, & 0, & 0; \\ 0, & 0, & 1, & 0; \\ 0, & 0, & -2, & 1 \end{bmatrix}}_{H_3} \underbrace{\begin{bmatrix} 1, & 1, & 0, & 0; \\ 0, & 2, & 0, & -1; \\ 0, & 0, & 1, & 0; \\ 0, & 0, & 2, & 0 \end{bmatrix}}_{T_3} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1, & 1, & 0, & 0; \\ 0, & 2, & 0, & -1; \\ 0, & 0, & 1, & 0; \\ 0, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}}_{A_4}$$

(*) $D = A_4$; $P = P_3 P_2 P_1 = P_{2,3}$;

Poi:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0; \\ 2, & 1, & 0, & 0; \\ -2, & 0, & 1, & 0; \\ -1, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}}_{H_1^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0; \\ 0, & 0, & 1, & 0; \\ 0, & 1, & 0, & 0; \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}}_{P_{2,3}^t} \underbrace{\begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0; \\ 0, & 1, & 0, & 0; \\ 0, & 0, & 1, & 0; \\ 0, & 1, & 0, & 1 \end{bmatrix}}_{H_2^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0; \\ 0, & 1, & 0, & 0; \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 2, & 1 \end{bmatrix}}_{H_3^{-1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0; \\ 2, & 0, & 1, & 0; \\ -2, & 1, & 0, & 0; \\ -1, & 1, & 2, & 1 \end{bmatrix}}_{\Sigma}$$

Infine:

$$S = P\,\Sigma = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0; \\ -2, & 1, & 0, & 0; \\ 2, & 0, & 1, & 0; \\ -1, & 1, & 2, & 1 \end{bmatrix}$$

Gli elementi $T_1(1,1)$, $T_2(2,2)$ e $T_3(3,3)$ utilizzati per ricavare le matrici elementari di Gauss H_1, H_2 e H_3 (in generale l'elemento $T_k(k,k)$ utilizzato per ricavare la matrice H_k) si chiamano *pivot*. Il termine *pivoting* si riferisce agli scambi effettuati alla k-esima iterazione per ottenere $T_k(k,k) \neq 0$.

(2.13) Esempio.

Calcolo di EGP(A) con:

$$A = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 0, & 0; \\ 2, & 2, & 1, & 0; \\ -2, & -2, & 0, & -1; \\ -1, & -1, & 2, & -1 \end{bmatrix}$$

(*) $A_1 = A$;

(*) $k = 1$; $A_1(1,1) \neq 0 \Rightarrow P_1 = I$; $T_1 = P_1 A_1$;

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0; \\ \lambda_2, & 1, & 0, & 0; \\ \lambda_3, & 0, & 1, & 0; \\ \lambda_4, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}$$

I valori $\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ sono determinati dalla richiesta che nella matrice $H_1 T_1$ gli elementi di posto (2,1),(3,1) e (4,1) - ovvero gli elementi della k-esima colonna al di sotto della diagonale - siano *uguali a zero*:

$$\lambda_2 T_1(1,1) + T_1(2,1) = 0 \quad ; \quad \lambda_3 T_1(1,1) + T_1(3,1) = 0 \quad ; \quad \lambda_4 T_1(1,1) + T_1(4,1) = 0$$

Tenuto conto che $T_1(1,1) \neq 0$, i valori $\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ sono *univocamente determinati*:

$$\lambda_2 = -\frac{T_1(2,1)}{T_1(1,1)} = -2 \quad ; \quad \lambda_3 = -\frac{T_1(3,1)}{T_1(1,1)} = 2 \quad ; \quad \lambda_4 = -\frac{T_1(4,1)}{T_1(1,1)} = 1$$

Infine:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$H_1 \qquad\qquad T_1 \qquad = \qquad A_2$$

(*) $k = 2$; $A_2(2,2) = 0 \Rightarrow$ essendo *anche* $A_2(3,2) = A_2(4,2) = 0$, gli elementi della k-esima colonna al di sotto della diagonale *sono già uguali a zero* si pone: $P_2 = I$ e $H_2 = I$, da cui $T_2 = P_2 A_2 = A_2$ e $A_3 = H_2 T_2 = H_2 A_2 = A_2$;

(*) $k = 3$; $A_3(3,3) = 0 \Rightarrow$ essendo $A_3(4,3) \neq 0$ scambio la terza riga con la quarta: $P_3 = P_{3,4}$, quindi:

$$T_3 = P_3 A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Questa matrice è già triangolare superiore, quindi $H_3 = I$ e $A_4 = T_3$;

(*) $D = A_4$; $P = P_3 P_2 P_1 = P_{3,4}$;

Poi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_1^{-1} \qquad\qquad P_{3,4}^{\,t} \qquad\qquad \Sigma$$

Infine:

$$S = P\,\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2.14) <u>Teorema</u> (esistenza della fattorizzazione LR con pivoting).

Sia $A \in R^{n \times n}$. La procedura EGP applicata ad A restituisce *una* fattorizzazione LR con pivoting di A. Ovvero: *per ogni* $A \in R^{n \times n}$ *esiste almeno una fattorizzazione* LR *con pivoting*.

(<u>Dimostrazione</u>: segue dai due esempi precedenti.)

(2.15) Esercizio (uso della fattorizzazione LR con pivoting).

Siano:

$$EGP(A) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) , \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Senza determinare A, decidere se A è invertibile e, in caso affermativo, determinare la soluzione del sistema $A\,x = b$.

(2.16) Procedura (studio di un sistema di equazioni lineari con EGP).

// $A \in R^{n \times n}$, $b \in R^n$.

(S,D,P) = EGP(A);
se $d_{kk} = 0$ per qualche k allora STOP; altrimenti
 c = SA(S,Pb);
 x^* = SI(D,c)

La procedura è *soddisfacente* nel senso che *comunque* assegnati i dati, decide se la matrice è invertibile e, in caso affermativo, determina la soluzione.

(2.17) Definizione (procedura GS).

Una procedura per la ricerca di una fattorizzazione QR di una matrice $A \in R^{n \times n}$ è la seguente procedura GS,[1] descritta nel caso particolare di n = 3.

Sia $A = [a_1, a_2, a_3] \in R^{3 \times 3}$.

Passo uno.

Cerchiamo $\Omega = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]$ a colonne ortogonali e Θ triangolare superiore con $\theta_{kk} = 1$ tali che $\Omega\,\Theta = A$. *Se matrici siffatte esistono*, riscrivendo l'ultima uguaglianza *per colonne* si ha:

$$\omega_1 = a_1 \quad , \quad \omega_1\,\theta_{1,2} + \omega_2 = a_2 \quad , \quad \omega_1\,\theta_{1,3} + \omega_2\,\theta_{2,3} + \omega_3 = a_3 \qquad (*)$$

La prima uguaglianza determina ω_1. Dalla seconda segue che:[2]

$$(\omega_1\,\theta_{1,2}) \bullet \omega_1 + \omega_2 \bullet \omega_1 = a_2 \bullet \omega_1$$

Poiché ω_1 e ω_2 sono ortogonali, si ha $\omega_2 \bullet \omega_1 = 0$. Allora, se $\omega_1 \neq 0$, si ha *necessariamente*:

$$\theta_{1,2} = (a_2 \bullet \omega_1) \,/\, (\omega_1 \bullet \omega_1)$$

e quindi:

$$\omega_2 = a_2 - \omega_1\,\theta_{1,2}$$

Dalla terza uguaglianza delle (*) si ha poi:

$$(\omega_1\,\theta_{1,3}) \bullet \omega_1 + (\omega_2\,\theta_{2,3}) \bullet \omega_1 + \omega_3 \bullet \omega_1 = a_3 \bullet \omega_1$$

e

$$(\omega_1\,\theta_{1,3}) \bullet \omega_2 + (\omega_2\,\theta_{2,3}) \bullet \omega_2 + \omega_3 \bullet \omega_2 = a_3 \bullet \omega_2$$

Poiché $\omega_2 \bullet \omega_1 = 0$ e, analogamente, $\omega_3 \bullet \omega_1 = 0$, allora si ha *necessariamente*:

$$\theta_{1,3} = (a_3 \bullet \omega_1) \,/\, (\omega_1 \bullet \omega_1)$$

---

1 Il nome GS della procedura deriva da quello della *procedura di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt*, da cui concettualmente deriva.

2 Date due colonne $v, w \in R^n$, si indica con $v \bullet w$ il loro prodotto scalare canonico: $v \bullet w = v_1\,w_1 + \ldots + v_n\,w_n$.

Essendo anche $\omega_3 \bullet \omega_2 = 0$, <u>se</u> $\omega_2 \neq 0$, si ha *necessariamente*:

$$\theta_{2,3} = (a_3 \bullet \omega_2) \,/\, (\omega_2 \bullet \omega_2)$$

e, infine:

$$\omega_3 = a_3 - \omega_1\, \theta_{1,3} - \omega_2\, \theta_{2,3}$$

<u>Passo due</u>.

La fattorizzazione di A trovata al passo precedente *non è* una fattorizzazione QR perché le colonne di Ω non hanno norma unitaria. Questo secondo passo determina, se possibile, una fattorizzazione QR normalizzando le colonne di Ω.

Sia: $\Delta = \mathrm{diag}(\|\omega_1\|, \|\omega_2\|, \|\omega_3\|)$.[3] <u>Se</u> anche $\omega_3 \neq 0$, la matrice Δ è invertibile e si verifica facilmente che la coppia

$$U = \Omega\, \Delta^{-1} \quad , \quad T = \Delta\, \Theta \qquad (**)$$

è una fattorizzazione QR di A. Si osservi che per la matrice T, triangolare superiore, si ha:

$$T_{k,k} = \|\omega_k\| > 0$$

(2.18) <u>Teorema</u> (procedura GS e fattorizzazione QR).

La procedura GS descritta nella definizione precedente determina *una* fattorizzazione QR di $A \in R^{n \times n}$ se e solo se A è invertibile.

(<u>Dimostrazione</u>. Se la procedura non si interrompe prematuramente perché $\omega_k = 0$ per qualche k, allora la coppia U,T determinata da (**) è costituita da due matrici invertibili (U perché ortogonale, T perché triangolare con sulla diagonale le norme, non nulle, delle colonne ω_k). Viceversa, se fosse $\omega_1 = 0$ allora sarebbe $a_1 = 0$ e quindi A non invertibile. Se fosse $\omega_1 \neq 0$ e $\omega_2 = 0$ allora sarebbe $0 = a_2 - \omega_1\, \theta_{1,2} = a_2 - a_1\, \theta_{1,2}$, dunque a_1 e a_2 sarebbero linearmente dipendenti, quindi A non invertibile. Se fosse $\omega_1 \neq 0$, $\omega_2 \neq 0$ e $\omega_3 = 0$ …)

(2.19) <u>Osservazione</u> (non unicità della fattorizzazione QR).

Siano $A \in R^{n \times n}$ e U,T una fattorizzazione QR di A. Se $E \in R^{n \times n}$ è una matrice diagonale con, ad esempio, E(1,1) = -1 e E(k,k) = 1 per k = 2,...,n, allora la coppia:

$$U' = U\,E \quad , \quad T' = E\,T$$

è una fattorizzazione QR di A *diversa* da U,T.

(2.20) <u>Procedura</u> (studio di un sistema di equazioni lineari con GS).

// $A \in R^{n \times n}$, $b \in R^n$.

<u>Se</u> GS(A) determina $\omega_k = 0$ per qualche k <u>allora</u> STOP; <u>altrimenti</u>

    (U,T) = GS(A);

    $x^* = SI(T, U^t\, b)$

---

3 Mutuando la simbologia da *Scilab*, con $\mathrm{diag}(v_1,...,v_n)$ si indica la matrice diagonale di dimensione $n \times n$ che ha sulla diagonale principale gli elementi $v_1,...,v_n$.

Anche questa procedura è *soddisfacente* nel senso che *comunque* assegnati i dati, decide se la matrice è invertibile (utilizzando il Teorema (2.18)) e, in caso affermativo, determina la soluzione.

(2.21) Osservazione (metodo di Householder).

Esistono procedure che determinano una fattorizzazione QR di una *qualsiasi* $A \in R^{n \times n}$ (anche non invertibile). Ad esempio la seguente:

```
(U,T) = Householder(A)

  \\ A ∈ R^(n×n)
  A_1 = A;
  per k = 1,...,n-1 ripeti:
       determina X_k ∈ R^(n×n) ortogonale tale che gli elementi sotto la diagonale principale
       delle prime k colonne di X_k A_k sono nulli e pone: A_(k+1) = X_k A_k;
  T = A_n;
  U = X_1^t … X_(n-1)^t
```

La funzione predefinita qr di Scilab realizza questa procedura.

(2.22) Procedura (studio di un sistema di equazioni lineari con Householder).

// $A \in R^{n \times n}$, $b \in R^n$.

(U,T) = Householder(A);
se t_{kk} = 0 per qualche k allora STOP; altrimenti $x^* = SI(T, U^t b)$

Anche questa procedura è *soddisfacente*.

(2.1) CONDIZIONAMENTO DELLA SOLUZIONE DI UN SISTEMA DI EQUAZIONI LINEARI

Siano:

- $A \in R^{n \times n}$ invertibile, $b \in R^n$ e x^* la soluzione del sistema $A\,x = b$
- $A' \in R^{n \times n}$ invertibile, $b' \in R^n$ e $\hat{x}$ la soluzione del sistema $A'\,x = b'$

(2.23) Definizione (perturbazioni, scostamento).

Siano:

$$\delta A = A' - A \in R^{n \times n} \quad , \quad \delta b = b' - b \in R^n$$

le *perturbazioni dei dati* e:

$$\delta x = \hat{x} - x^* \in R^n$$

lo *scostamento della soluzione*.

(2.24) Problema (condizionamento della soluzione di un sistema di equazioni lineari).

Assegnato un modo di *misurare* le perturbazioni dei dati e lo scostamento della soluzione, determinare *quanto grande può essere* lo scostamento della soluzione in funzione di *quanto grandi sono* le perturbazioni dei dati.