

(2.06) Osservazione (casi semplici, conclusione).

(0) *ortogonale* (A è ortogonale se sussiste una delle tre condizioni *equivalenti*:

- (1) le colonne (o le righe) di A sono una *base ortonormale* di $\mathbb{R}^n$ con prodotto scalare canonico;
- (2) A è invertibile e $A^{-1} = A^t$;
- (3) $A^t A = A A^t = I$)

- A è *certamente invertibile*.
- La soluzione x^* del sistema $Ax = b$ si determina con:

$$x^* = A^t b$$

Il numero di operazioni necessario per determinare la soluzione è quello delle operazioni necessarie per effettuare il prodotto di una matrice per una colonna:

$$n^2 \text{ moltiplicazioni} + n(n-1) \text{ somme}$$

(P) *di permutazione* (A è di permutazione se si ottiene dalla matrice identità I *permutando* le colonne).

Le colonne di una matrice di permutazione sono quindi quelle della matrice identità (a parte l'ordine). Dunque costituiscono una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ con prodotto scalare canonico (la base canonica). Se ne deduce che *una matrice di permutazione è ortogonale*.

- Anche in questo caso si ha: A è *certamente invertibile*.
- La soluzione x^* del sistema $Ax = b$ si determina con:

$$x^* = A^t b$$

Il numero di operazioni necessario per determinare la soluzione è, questa volta, *zero* perché A^t , come A , è di permutazione e il prodotto Pv di una matrice di permutazione P per una colonna v produce una colonna che ha le *stesse componenti* di v ma in ordine diverso.

(2.07) Osservazione (caso generale).

Quando la matrice A del sistema *non* ha struttura tale da ricadere in un caso semplice, il problema si affronta in due passi:

Primo Passo:

Si *fattorizza* A in prodotto di *fattori semplici*.

Esempio: $A = F_1 F_2 F_3$, con F_1 ortogonale, F_2 triangolare superiore e F_3 di permutazione.

Secondo Passo:

Si utilizza la fattorizzazione per decidere se A è invertibile e, in caso affermativo, per determinare la soluzione x^* .

Esempio:

$$A = F_1 F_2 F_3 \Rightarrow \det A = \det F_1 \det F_2 \det F_3$$

quindi: A è invertibile $\Leftrightarrow$ ciascun fattore è invertibile. Poi:

$$(1) \quad A x = b \equiv F_1 F_2 F_3 x = b \equiv F_2 F_3 x = F_1^{-1} b = c_1$$

e c_1 si ottiene risolvendo il sistema semplice $F_1 x = b$.

$$(2) \quad F_2 F_3 x = c_1 \equiv F_3 x = F_2^{-1} c_1 = c_2$$

e c_2 si ottiene risolvendo il sistema semplice $F_2 x = c_1$.

$$(3) \quad F_3 x = c_2 \equiv x^* = F_3^{-1} c_2$$

e x^* si ottiene risolvendo il sistema semplice $F_3 x = c_2$.

In generale, se A è invertibile, la soluzione si determina risolvendo tanti *sistemi semplici* quanti sono i fattori di A .

(2.08) Definizione (fattorizzazione LR, LR con pivoting e QR).

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Una *fattorizzazione LR* di A è una coppia S, D tale che:

- $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è una matrice triangolare inferiore con $s_{kk} = 1$ per $k = 1, \dots, n$
- $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è una matrice triangolare superiore
- $SD = A$

Si osservi che il fattore sinistro S è invertibile. Allora: A è invertibile se e solo se lo è il fattore destro D .

Una *fattorizzazione LR con pivoting* di A è una terna P, S, D tale che:

- $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è una matrice di permutazione
- la coppia S, D è una fattorizzazione LR di PA

La relazione tra A, P, S e D è:

$$PA = SD \quad \text{ovvero} \quad A = P^t SD$$

Si osservi che sia P che il fattore sinistro S sono invertibili. Di nuovo: A è invertibile se e solo se lo è il fattore destro D .

Una *fattorizzazione QR* di A è una coppia U, T tale che:

- $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è una matrice ortogonale
- $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è una matrice triangolare superiore
- $UT = A$

Si osservi che il fattore sinistro U è invertibile. Anche in questo caso: A è *invertibile* se e solo se lo è il fattore destro T .

(2.09) Definizione (matrice elementare di Gauss).

Data $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, per cercare una fattorizzazione LR con pivoting si utilizza la procedura EGP che si basa sul procedimento di *eliminazione di Gauss*. Per descrivere la procedura, occorre la nozione di matrice elementare di Gauss.

$H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è una *matrice elementare di Gauss* se: esistono un indice $k \in \{1, \dots, n-1\}$ e numeri reali $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$ tali che H si ottiene dalla matrice identità $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sostituendo alla colonna k -esima e_k (le cui componenti sono tutte uguali a zero ed eccezione della k -esima che vale uno) la colonna:

$$\begin{array}{c} [0 \ ; \dots \ ; \ 0 \ ; \ 1 \ ; \ \lambda_{k+1} \ ; \dots \ ; \ \lambda_n] \\ \uparrow \\ k\text{-esima componente} \end{array}$$

Esempi:

- la matrice $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è elementare di Gauss;
- la matrice:

$$\begin{bmatrix} 1, 0, 0; \\ 1, 1, 0; \\ -2, 0, 1 \end{bmatrix}$$

è elementare di Gauss;

- la matrice:

$$\begin{bmatrix} 1, 0, 1; \\ 1, 1, 0; \\ -2, 0, 1 \end{bmatrix}$$

non è elementare di Gauss.

(2.10) Proprietà (delle matrici elementari di Gauss).

Sia H una matrice elementare di Gauss. Allora:

- H è *triangolare inferiore* con $h_{kk} = 1$ per ogni k (dunque *invertibile*)
- H^{-1} si ottiene da H *cambiando segno* agli elementi al di sotto della diagonale principale

(ad esempio:

$$\begin{array}{cc} H = \begin{bmatrix} 1, 0, 0; \\ 1, 1, 0; \\ -2, 0, 1 \end{bmatrix} & H^{-1} = \begin{bmatrix} 1, 0, 0; \\ -1, 1, 0; \\ 2, 0, 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

(2.11) Definizione (procedura EGP).

La seguente procedura EGP opera su una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e determina una terna P, S, D che è una fattorizzazione LR con pivoting di A .

$(P, S, D) = \text{EGP}(A)$

$A_1 = A;$

per $k = 1, \dots, n-1$ ripeti:

determina opportunamente P_k di permutazione, H_k elementare di Gauss e pone $A_{k+1} = H_k P_k A_k;$

$D = A_n;$

$P = P_{n-1} \dots P_1;$

$S = P (P_1^t H_1^{-1} \dots P_{n-1}^t H_{n-1}^{-1})$

Le matrici P_k e H_k sono determinate in modo da ottenere A_n *triangolare superiore*.

Si osservi che:

$$D = A_n = H_{n-1} P_{n-1} A_{n-1} = \dots = H_{n-1} P_{n-1} \dots H_1 P_1 A$$

da cui, ricavando A :

$$A = (P_1^t H_1^{-1} \dots P_{n-1}^t H_{n-1}^{-1}) D$$

La matrice $P_1^t H_1^{-1} \dots P_{n-1}^t H_{n-1}^{-1}$ *non* è triangolare inferiore con elementi uguali ad uno sulla diagonale ma la matrice

$$P (P_1^t H_1^{-1} \dots P_{n-1}^t H_{n-1}^{-1})$$

lo è. Quindi, la coppia $S = P (P_1^t H_1^{-1} \dots P_{n-1}^t H_{n-1}^{-1})$, D è una fattorizzazione LR di PA , come si voleva.

Resta da chiarire come, ad ogni iterazione, si determinano le matrici P_k e H_k .