Lezione 15 (ore 27,28) - 23 ottobre 2025, 8:30 - 10:30 F3

(2) SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI

(2.01) Esempio.

Esempi di contesti in cui si devono risolvere sistemi di equazioni lineari:

- ad ogni iterazione del metodo di Newton per funzioni da R^n in R^n;
- risoluzione di reti elettriche resistive lineari
- risoluzione di reti elettriche RLC lineari in regime sinusoidale

(2.02) Problema.

Dati $A \in R^{n\times n}$ invertibile e $b \in R^n$, determinare $x^* \in R^n$ t.c. $A\,x^* = b$. La colonna x^* si chiama *soluzione* del sistema $A\,x = b$.

(2.03) Osservazione.

Una matrice $A \in R^{n\times n}$ è invertibile se verifica una delle seguenti proprietà *equivalenti*:

- esiste una matrice $M \in R^{n\times n}$ t.c. $AM = MA = I$ (la matrice M si chiama matrice *inversa* di A e si indica con A^{-1})
- $A\,x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (questa proprietà si esprime anche con $\ker A = \{ 0 \}$)
- per *ogni* colonna $b \neq 0$ in R^n, esiste *una sola* soluzione x^* del sistema $A\,x = b$
- $\det A \neq 0$

(2.04) Osservazione (casi semplici).

Decidere se la matrice A del sistema è invertibile e, in caso affermativo, determinare la soluzione del sistema $A\,x = b$ è *semplice* quando la *struttura* di A ricade in uno dei seguenti casi:

(D) *diagonale* (A è diagonale se $i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0$)

- Si ha: $\det A = a_{1,1} \cdots a_{n,n}$, quindi: $\det A = 0 \Leftrightarrow$ esiste k t.c. $a_{k,k} = 0$. Dunque: A *invertibile se e solo se per ogni* k *si ha* $a_{k,k} \neq 0$.

- Se A è invertibile, le componenti della soluzione x^* del sistema $A\,x = b$ si determinano con:

$$x_k^* = b_k \,/\, a_{k,k}$$

  Il numero di operazioni necessario per determinare la soluzione è:

  n *divisioni*.

(T) *triangolare* (A è triangolare *superiore* se $i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$; è triangolare *inferiore* se $i < j \Rightarrow a_{i,j} = 0$)

- Anche in questo caso si ha: $\det A = a_{1,1} \cdots a_{n,n}$. Dunque: A *invertibile se e solo se* *per ogni* k *si ha* $a_{k,k} \neq 0$.

- Se A è *triangolare superiore* invertibile, le componenti della soluzione x^* del sistema $A\,x = b$ si determinano con la seguente procedura di *sostituzione all'indietro*:

```
z = SI(T,c)
      se T non è triangolare superiore invertibile allora STOP;
         altrimenti
            zn = cn / tn,n;
            per k = n-1,...,1 ripeti
                s = tk,k+1 * xk+1 + ... + tk,n * xn;
                xk = (bk - s) / tk,k;
```

Il numero di operazioni necessario per determinare la soluzione è:

$$n \textit{ divisioni} + \frac{n(n-1)}{2} \;(\textit{moltiplicazioni} + \textit{somme})$$

(2.05) Esercizio (per casa).

Descrivere la procedura di *sostituzione in avanti* di intestazione

$$z = SA(T,c)$$

che, dati una matrice triangolare inferiore invertibile T ed una colonna c, determina la soluzione del sistema $T\,x = c$. Determinare anche il numero di operazioni necessario per determinare la soluzione.