Lezione 14 (ore 25,26) - 22 ottobre 2025, 11:30 - 13:30 A13

(1.80) Esempio.

Sia $f:R^2 \to R^2$ definita da:[1]

$$f(x) = [\ f_1(x_1,x_2)\ ;\ f_2(x_1,x_2)\ ] = [\ x_1^2 - x_2\ ;\ - x_1 + x_2^2\ ]$$

La matrice jacobiana di f in x è:

$$J_f(x) = [\ 2\ x_1\ ,\ -1\ ;\ -1\ ,\ 2\ x_2\ ]\ :\ R^2 \to R^{2\times 2}$$

(1.81) Osservazione.[2]

Noto un elemento x(k) in R^n, il metodo di Newton per la funzione $f:R^n \to R^n$ determina l'elemento x(k+1) risolvendo l'equazione:

$$f(x(k)) + J_f(x(k))\ (x - x(k)) = 0$$

ovvero:

$$J_f(x(k))\ (x - x(k)) = - f(x(k))$$

Quest'ultima equazione è un *sistema di equazioni lineari*. Se la matrice $J_f(x(k))$ è invertibile allora si ottiene:

$$x - x(k) = - J_f(x(k))^{-1}\ f(x(k))$$

L'elemento x(k+1) è quindi:

$$x(k+1) = x(k) - J_f(x(k))^{-1}\ f(x(k))$$

(1.82) Esempio.

Si consideri la funzione $f:R^2 \to R^2$ dell'Esempio (1.80) e sia x(0) = [1 ; -1]. Per determinare x(1) occorre calcolare $J_f(x(0))$, f(x(0)) e poi risolvere il sistema

$$J_f(x(0))\ z = - f(x(0))$$

Si ha:

$$J_f(x(0)) = [\ 2\ ,\ -1\ ;\ -1\ ,\ -2\ ] \quad , \quad f(x(0)) = [\ 2\ ;\ 0\ ]$$

Si osserva che $J_f(x(0))$ è invertibile. La soluzione del sistema risulta:

$$p = [\ - 4/5\ ;\ 2/5\ ]$$

Allora:

$$x(1) = x(0) + p = [\ 1/5\ ;\ -3/5\ ]$$

---

1 Per le matrici utilizzeremo la notazione di *Scilab*.

2 Per le successioni di elementi in R^n, useremo la notazione x(0), x(1), x(2), ...

(1.83) <u>Definizione</u>.

Il *metodo di Newton* applicato alla funzione $f:R^n \to R^n$, con matrice jacobiana $J_f(x)$ invertibile, è il metodo ad un punto definito dalla funzione:

$$N(x) = x - J_f(x)^{-1}\, f(x) \;:\; R^n \to R^n$$

(1.84) <u>Teorema</u> (di convergenza locale per metodi ad un punto in R^n).

Siano $h:R^n \to R^n$ sufficientemente regolare e α punto unito di h.

<u>Se</u> *tutti* gli autovalori di $J_h(\alpha)$ hanno *modulo* < 1 <u>allora</u> esiste un numero reale $\rho > 0$ tale che:

$|| x(0) - \alpha || < \rho \quad \Rightarrow \quad$ la successione x(k) generata dal metodo iterativo definito da h a partire da x(0) *converge ad* α

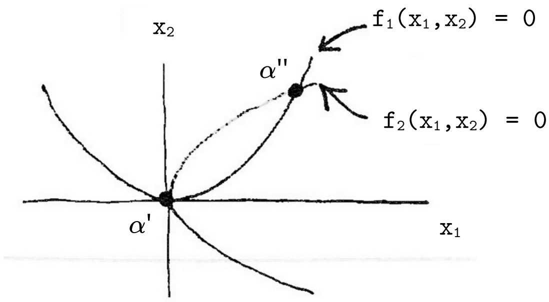
(<u>Dimostrazione</u> omessa.)

Questo teorema fornisce una *condizione sufficiente per l'utilizzabilità* del metodo definito da h per approssimare α. Per un metodo ad un punto in R^n, essere utilizzabile significa che *per ogni* x(0) *sufficientemente vicino ad un punto unito* α *di* h, *la successione generata dal metodo definito da* h *a partire da* x(0) *converge ad* α.

(1.85) <u>Esempio</u> (prima parte).

Si consideri ancora la funzione $f:R^2 \to R^2$ dell'Esempio (1.80).
La funzione ha *due zeri*:

$$\alpha' = [0\ ;\ 0] \quad , \quad \alpha'' = [1\ ;\ 1]$$



Per approssimare i due zeri si considera il metodo definito dalla funzione

$$h(x) = x + f(x) = [\ x_1 + x_2^2 - x_2\ ;\ x_2 - x_1 + x_2^2\ ]$$

Si verifica facilmente che i punti uniti di h sono tutti e soli gli zeri di f.

Per la matrice jacobiana si ha:

$$J_h(x) = I + J_f(x) = [\ 1 + 2\,x_1\ ,\ -1\ ;\ -1\ ,\ 1 + 2\,x_2\ ]$$

da cui:

$$J_h(\alpha') = [\ 1\ ,\ -1\ ;\ -1\ ,\ 1\ ]$$

Gli autovalori sono le radici del polinomio caratteristico:

$$p(\lambda) = \det(\ J_h(\alpha') - \lambda I) = (1 - \lambda)^2 - 1 \qquad \text{ovvero} \qquad \lambda_1 = 0\ ,\ \lambda_2 = 2$$

Il Teorema di convergenza locale non è applicabile. Sussiste però la seguente

(1.86) Osservazione.

Nelle ipotesi del Teorema di convergenza locale: se *almeno uno* degli autovalori di $J_h(\alpha)$ ha *modulo* > 1 allora il metodo iterativo definito da h *non è utilizzabile* per approssimare α.

(1.87) Esempio.

Per giustificare l'asserto precedente, si consideri il seguente caso particolare.

Siano $h(x) = [\ h_1(x_1)\ ;\ h_2(x_2)\ ]: R^2 \to R^2$ con h_1 e h_2 regolari, α_1 punto unito di h_1 e α_2 punto unito di h_2. Ne segue che $\alpha = [\alpha_1\ ;\ \alpha_2]$ è punto unito di h. La matrice jacobiana di h in α è:

$$J_h(\alpha) = [\ h_1'(\alpha_1)\ ,\ 0\ ;\ 0\ ,\ h_2'(\alpha_2)\ ]$$

i cui autovalori sono:

$$\lambda_1 = h_1'(\alpha_1) \qquad e \qquad \lambda_2 = h_2'(\alpha_2)$$

Sia x(k) una successione generata dal metodo definito da h. Allora $x_1(k)$ e $x_2(k)$ sono, rispettivamente, una successione generata dal metodo definito da h_1 e, rispettivamente, dal metodo definito da h_2. Se, ad esempio, $|\lambda_1| = |h_1'(\alpha_1)| > 1$, per la successione $x_1(k)$ si ha (Osservazione (1.61) della Lezione 10): o $x_1(k) = \alpha_1$ per un valore finito di k o $x_1(k)$ non converge ad α_1. Come già osservato a suo tempo, l'eventualità che accada la prima condizione è molto remota. Dunque ci si aspetta che la successione non sia convergente. Se in questa situazione il metodo iterativo definito da h fosse utilizzabile per approssimare α allora per qualunque x(0) sufficientemente vicino ad α la successione x(k) risulterebbe convergere al punto unito di h. Ne seguirebbe che per qualunque $x_1(0)$ sufficientemente vicino ad α_1 la successione $x_1(k)$ risulterebbe convergere al punto unito di h_1. Ma questo, per quanto osservato sopra, non è possibile.

(1.88) Esempio (seconda parte).

Dal risultato finale della prima parte dell'esempio si deduce che il metodo definito da h *non è utilizzabile* per approssimare α'.

Per α'' si ha:

$$J_h(\alpha'') = [\ 3\ ,\ -1\ ;\ -1\ ,\ 3\ ]$$

e quindi:

$$p(\lambda) = \det(\ J_h(\alpha'') - \lambda I) = (3 - \lambda)^2 - 1 \qquad \text{ovvero} \qquad \lambda_1 = 2\ ,\ \lambda_2 = 4$$

e il metodo definito da h *non è utilizzabile* neppure per approssimare α''.

(1.89) Esercizio (per casa).

Sia f la funzione dell'Esempio (1.85). Determinare la funzione $N: R^2 \to R^2$ che definisce il metodo di Newton applicato ad f e verificare (con tanta pazienza) che si ha: $J_N(\alpha') = 0$ e $J_N(\alpha'') = 0$.

(1.90) Osservazione (utilizzabilità del metodo di Newton).

Quanto mostrato nell'esercizio precedente vale in generale. Si ha infatti:

Se f ha derivate seconde continue, J_f è non singolare e α è uno zero di f, allora $J_N(\alpha) = 0$ e il metodo di Newton *è utilizzabile* per approssimare α. Si ha inoltre che, analogamente a quanto accade nel caso di funzioni di una variabile, l'*ordine di convergenza* ad α del metodo di Newton è *almeno due*.