

(1.73) Osservazione (criteri d'arresto, continuazione).

Entrambi i criteri d'arresto considerati nell'Osservazione (1.72) della Lezione 12 presentano il problema che, in alcuni casi, x_k è un'approssimazione di α non sufficientemente buona. Questo nasce dal fatto che, nel criterio d'arresto, stimando l'errore assoluto commesso approssimando α con l'ultimo elemento della successione calcolato ($|x_k - \alpha|$) utilizzando la quantità scelta ($|x_{k+1} - x_k|$ in un caso, $|f(x_k)|$ nell'altro), si commette un errore relativo che *non tende a zero* quando $k \rightarrow \infty$.

I due criteri si possono modificare in modo da ottenere stime migliori. Ponendosi nel medesimo contesto utilizzato per i due criteri precedenti:

(1-bis) Dato un numero reale positivo E (l'errore massimo richiesto dall'utilizzatore) e inseriti E e la derivata h' tra le variabili di ingresso della procedura:

$$\text{se } |x_{k+1} - x_k| / |1 - h'(x_k)| < E \text{ allora STOP}$$

Il criterio è *calcolabile* ed *efficace*.

Per capire quanto buona sia x_k come approssimazione di α quando la condizione è verificata, si osservi che, procedendo come in (1) dell'Osservazione (1.72):

$$\left| \frac{x_{k+1} - x_k}{1 - h'(x_k)} \right| = \left| \frac{1 - h'(t_k)}{1 - h'(x_k)} \right| |x_k - \alpha| = (1 + \varepsilon_k) |x_k - \alpha|$$

con

$$\varepsilon_k = \frac{h'(x_k) - h'(t_k)}{1 - h'(x_k)}$$

In questo caso, quando $k \rightarrow \infty$ si ha $x_k \rightarrow \alpha$, $t_k \rightarrow \alpha$ e quindi $\varepsilon_k \rightarrow 0$.

(2-bis) Dato un numero reale positivo E (l'errore massimo richiesto dall'utilizzatore) ed inserite E , f ed f' tra le variabili di ingresso della procedura sia:

$$\text{se } |f(x_k)| / |f'(x_k)| < E \text{ allora STOP}$$

Il criterio è *calcolabile* ed *efficace*.

Per capire quanto buona sia x_k come approssimazione di α quando la condizione è verificata, si osservi che, procedendo come in (2) dell'Osservazione (1.72):

$$\left| \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \right| = \left| \frac{f'(t_k)}{f'(x_k)} \right| |x_k - \alpha| = (1 + \varepsilon_k) |x_k - \alpha|$$

con

$$\varepsilon_k = \left| \frac{f'(t_k)}{f'(x_k)} \right| - 1$$

Anche in questo caso, quando $k \rightarrow \infty$ si ha $x_k \rightarrow \alpha$, $t_k \rightarrow \alpha$ e quindi $\varepsilon_k \rightarrow 0$.

(1.74) Osservazione (metodi ad un punto in $F(\beta, m)$).

Siano:

- $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e γ in $[a, b]$ che verificano le ipotesi del Teorema di convergenza
- $\varphi: [a, b] \rightarrow F(\beta, m)$ l'algoritmo usato per approssimare i valori di h , tale che:

$$\text{per ogni } \theta \text{ in } [a, b] \cap F(\beta, m), |\varphi(\theta) - h(\theta)| \leq d_\varphi$$

Siano poi x_k la successione generata dal metodo definito da h a partire da γ , convergente ad α per ipotesi, e ξ_k la successione definita da $\xi_0 = \gamma$, $\xi_{k+1} = \varphi(\xi_k)$. Si supponga che per ogni k sia ξ_k in $[a, b]$.

Si ha:

(1.75) Teorema (stabilità dei metodi ad un punto, parte I).

Sia $\delta > 0$. Se $\text{MetodoUnPunto}(h, a, b, \delta)$ eseguito in $F(\beta, m)$ definisce ξ in $F(\beta, m)$ tale che

$$|\xi_{k+1} \ominus \xi_k| < rd(\delta)$$

allora ξ è punto unito di una funzione $h^*: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

$$\text{per ogni } x \text{ in } [a, b], |h^*(x) - h(x)| \leq d_\varphi + \delta$$

Informalmente: se d_φ 'piccolo', la procedura restituisce un punto unito di una funzione h^* 'vicina' ad h .

(1.76) Teorema (stabilità dei metodi ad un punto, parte II).

Siano inoltre $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione regolare tale che $f(\alpha) = 0$, e $\psi: [a, b] \rightarrow F(\beta, m)$ l'algoritmo usato per approssimare i valori di f tale che:

$$\text{per ogni } \theta \text{ in } [a, b] \cap F(\beta, m), |\psi(\theta) - f(\theta)| \leq d_\psi$$

Sia $\delta > 0$. Se $\text{MetodoUnPunto}(h, a, b, f, \delta)$ eseguito in $F(\beta, m)$ definisce ξ in $F(\beta, m)$ tale che

$$|\psi(\xi_k)| < rd(\delta)$$

allora ξ è zero di una funzione $f^*: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

$$\text{per ogni } x \text{ in } [a, b], |f^*(x) - f(x)| \leq d_\psi + \delta$$

Informalmente: se d_ψ 'piccolo', la procedura restituisce uno zero di una funzione f^* 'vicina' ad f .

(1.77) Osservazione (efficacia dei criteri d'arresto in $F(\beta, m)$).

I due teoremi precedenti stabiliscono che se in $F(\beta, m)$ la procedura definisce ξ allora... Questo lascia supporre che la procedura *potrebbe non definire* ξ . La supposizione è corretta: come già sappiamo, in $F(\beta, m)$ i criteri d'arresto possono risultare *non efficaci*.

Esempio.

Sia $[a, b]$ non contenente 0. Allora $A = [a, b] \cap F(\beta, m)$ contiene un numero finito di elementi. Sia $\Delta > 0$ la minima distanza tra due elementi consecutivi di A . Se φ non ha punti uniti in $[a, b]$, si ha allora:

$$|\xi_{k+1} - \xi_k| \geq \Delta \quad \text{e quindi} \quad |\xi_{k+1} \ominus \xi_k| \geq \Delta$$

Se l'utilizzatore sceglie $\delta < \Delta$, la condizione $|\xi_{k+1} \ominus \xi_k| < \text{rd}(\delta)$ non può essere verificata.

Nell'altro caso, Se ψ non ha zeri in $[a, b]$, detto $\Gamma > 0$ il valore minimo di ψ in A , si ha:

$$|\psi(\xi_k)| \geq \Gamma$$

Se l'utilizzatore sceglie $\delta < \Gamma$, la condizione $|\psi(\xi_k)| < \text{rd}(\delta)$ non può essere verificata.

(1.78) Esempio.

Sia $f(x) = (x - 2)^2$. La funzione ha un solo zero, $\alpha = 2$ e $f'(\alpha) = 0$. Scelto $x_0 > 2$, per la successione generata dal metodo di Newton applicato ad f si ha:

$$x_{k+1} = (x_k + 2) / 2$$

da cui:

$$x_k - 2 = (1/2)^k (x_0 - 2)$$

La successione converge ad α ma è una successione di *tipo esponenziale*. In questo caso si ha:

$$h_n(x) = (x + 2) / 2$$

dunque $h'(\alpha) = 1/2 \neq 0$. In questo caso, il metodo di Newton risulta avere *ordine di convergenza ad α pari a uno*.

(1.3) METODO DI NEWTON PER FUNZIONI DA $\mathbb{R}^n$ IN $\mathbb{R}^n$

(1.79) Osservazione.

Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione regolare, ciascuna iterazione del metodo di Newton costruisce, a partire da un valore x_k noto, il numero reale x_{k+1} determinando lo zero (se esiste) della funzione affine (si veda l'Osservazione (1.67) nella Lezione 11):

$$A_k(x) = f(x_k) + f'(x_k) (x - x_k)$$

La funzione $A_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è lo sviluppo di Taylor di $f(x)$ di ordine uno in x_k (graficamente: la retta di equazione $y = A_k(x)$ è la tangente al grafico di $f(x)$ in x_k).

L'idea del metodo di Newton nel caso in cui $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sia regolare è la stessa: a ciascuna iterazione, a partire da un valore noto $x_k \in \mathbb{R}^n$, si costruisce lo zero (se esiste) dello sviluppo di Taylor di $f(x)$ di ordine uno in x_k :

$$A_k(x) = f(x_k) + J_f(x_k) (x - x_k)$$

dove $J_f(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è la *matrice jacobiana* di f in x , ovvero la matrice di elemento i, j dato da:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$$