

(1.71) Esercizio.

Siano t un numero reale positivo, n un numero intero ≥ 2 e $f(x) = x^n - t$. La funzione f ha un solo zero, la radice n -esima di t : $t^{1/n}$.

Decidere se il metodo di Newton sia applicabile per approssimare lo zero e, in caso affermativo, determinare x_0 in modo che il metodo generi una successione convergente allo zero.

(1.72) Osservazione (criteri d'arresto).

I criteri d'arresto presentati per il metodo di bisezione *non* sono utilizzabili per i metodi ad un punto: questi ultimi metodi, contrariamente al metodo di bisezione, non generano una successione di intervalli di misura tendente a zero e ciascuno contenente uno zero della funzione. Occorrono dunque criteri diversi. Discutiamo i due più utilizzati, entrambi di tipo *assoluto*.

Siano f la funzione della quale si vuole approssimare uno zero, $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e γ che verificano le ipotesi del Teorema di convergenza, α il punto unito di h (e zero di f) in $[a, b]$ e x_k la successione generata dal metodo definito da h a partire da γ . La successione x_k converge ad α .

(1) Dato un numero reale positivo E (l'errore massimo richiesto dall'utilizzatore) e inserito E tra le variabili di ingresso della procedura:

$$\text{se } |x_{k+1} - x_k| < E \text{ allora STOP}$$

Il criterio è *calcolabile*: a ciascuna iterazione la procedura conosce x_k , determina $x_{k+1} = h(x_k)$ e verifica la condizione del criterio.

Il criterio è *efficace*: sia la successione x_k che la successione $x_{k+1} = h(x_k)$ convergono ad α (la funzione h è continua e α è punto unito di h), quindi la differenza tende a zero. La condizione del criterio è certamente soddisfatta dopo un numero finito di iterazioni.

Per capire quanto buona sia x_k come approssimazione di α quando la condizione è verificata, si osservi che:

$$|x_{k+1} - x_k| = |h(x_k) - x_k| = |(h(x_k) - \alpha) + (\alpha - x_k)| = |(h(x_k) - h(\alpha)) + (\alpha - x_k)|$$

Utilizzando il Teorema di Lagrange:

$$h(x_k) - h(\alpha) = h'(t_k)(x_k - \alpha) \quad \text{con } t \text{ tra } x_k \text{ e } \alpha$$

dunque:

$$|x_{k+1} - x_k| = |h'(t_k)(x_k - \alpha) + (\alpha - x_k)| = |h'(t_k) - 1| |x_k - \alpha| = |1 - h'(t_k)| |x_k - \alpha|$$

L'accuratezza di x_k come approssimazione di α *dipende* dal valore di $h'(t_k)$. Precisamente:

- se $h'(t_k) \approx 0$ si ha $|x_{k+1} - x_k| \approx |x_k - \alpha|$ e il criterio d'arresto interrompe la costruzione della successione *non appena* l'approssimazione è accurata (si osservi

che se f è sufficientemente regolare e $f'(\alpha) \neq 0$ il Metodo di Newton rientra in questo caso);

- se $h'(t_k) \approx 1$ si ha $1 - h'(t_k) \approx 0$ e il criterio d'arresto interrompe la costruzione della successione *prima* che l'approssimazione sia accurata;
- se $h'(t_k) < 0$ si ha $|1 - h'(t_k)| > 1$ e quindi $|x_{k+1} - x_k| < E \Rightarrow |x_k - \alpha| < E$ (ma il criterio d'arresto potrebbe interrompere la costruzione della successione *in ritardo*: l'approssimazione potrebbe essere buona già da qualche iterazione).

Esempio: Sia $h(x) = \alpha + A(x - \alpha)$ e $h'(x) = A$. Per ogni k si ha: $x_k - \alpha = A^k(x_0 - \alpha)$.

Se $A = 0.9$ (≈ 1) e k è tale che $|x_{k+1} - x_k| = 0.99 E$ (criterio d'arresto verificato), allora $|x_k - \alpha| = (0.99 / 0.1) E = 9.9 E > E$ e l'accuratezza dell'approssimazione non verifica la richiesta dell'utilizzatore.

Se $A = -0.9$ e k tale che $|x_{k+1} - x_k| = 0.99 E$ (criterio d'arresto verificato), allora $|x_k - \alpha| = E / 1.9 \approx 0.5 E < E$ e l'accuratezza dell'approssimazione verifica la richiesta dell'utilizzatore. Però: 6 iterazioni prima si aveva già $|x_{k-6} - \alpha| = |x_k - \alpha| / |A|^6 = E / (1.9 \cdot 0.9^6) = E / 1.009... < E$, ovvero *già 6 iterazioni prima* l'accuratezza dell'approssimazione verificava la richiesta dell'utilizzatore.

(2) Dato un numero reale positivo E (l'errore massimo richiesto dall'utilizzatore) ed inserite tra le variabili di ingresso della procedura sia E che f :

se $|f(x_k)| < E$ allora STOP

Il criterio è *calcolabile*: a ciascuna iterazione la procedura conosce x_k , determina $f(x_k)$ e verifica la condizione del criterio.

Il criterio è *efficace*: la successione x_k converge ad α e la successione $f(x_k)$ converge a $f(\alpha) = 0$ (la funzione f è continua e α è zero di f). La condizione del criterio è quindi certamente soddisfatta dopo un numero finito di iterazioni.

Per capire quanto buona sia x_k come approssimazione di α quando la condizione è verificata, si supponga f regolare e si osservi che:

$$f(x_k) = f(x_k) - f(\alpha)$$

Utilizzando il Teorema di Lagrange:

$$f(x_k) - f(\alpha) = f'(t_k)(x_k - \alpha) \quad \text{con} \quad t_k \text{ tra } x_k \text{ e } \alpha$$

dunque:

$$|f(x_k)| = |f'(t_k)| |x_k - \alpha|$$

L'accuratezza di x_k come approssimazione di α *dipende* dal valore di $|f'(t_k)|$. Precisamente:

- se $|f'(t_k)| \approx 1$ si ha $|f(x_k)| \approx |x_k - \alpha|$ e il criterio d'arresto interrompe la costruzione della successione *non appena* l'approssimazione è accurata;
- se $|f'(t_k)| \approx 0$ il criterio d'arresto interrompe la costruzione della successione *prima* che l'approssimazione sia accurata;
- se $|f'(t_k)| > 1$ si ha $|f(x_k)| < E \Rightarrow |x_k - \alpha| < E / |f'(t_k)| < E$ (ma il criterio d'arresto potrebbe interrompere la costruzione della successione *in ritardo*: l'approssimazione potrebbe essere buona già da qualche iterazione).