

(1.2) METODO DI NEWTON

(1.64) Definizione (metodo di Newton).

Sia $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione con derivata prima tale che $f'(x) \neq 0$ per ogni x in $[a,b]$.

Il *metodo di Newton* applicato alla funzione f è il metodo ad un punto definito dalla funzione $h_N:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

$$h_N(x) = x - (f'(x))^{-1} f(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Si osservi che i *punti uniti* di h_N sono tutti e soli gli *zeri* di f .

(1.65) Osservazione (utilizzabilità del metodo di Newton).

Sia $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione con derivata *seconda* continua e con $f'(x) \neq 0$ per ogni x in $[a,b]$. Sia poi α uno zero di f in $[a,b]$. Si ha:

$$h_N'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f''(x)f(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f''(x)f(x)}{(f'(x))^2}$$

La funzione h_N' è continua e, essendo $f(\alpha) = 0$ e $f'(\alpha) \neq 0$, si ha

$$h_N'(\alpha) = 0$$

Per il Teorema (1.59) della Lezione 10, il metodo di Newton è *utilizzabile* per approssimare α .

(1.66) Osservazione (criterio di utilizzabilità per il metodo di Newton).

Siano $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione con derivata seconda continua e α uno zero di f in $[a,b]$. Condizione *sufficiente* perché il metodo di Newton applicato ad f sia *utilizzabile* per approssimare α è:

$$f'(\alpha) \neq 0$$

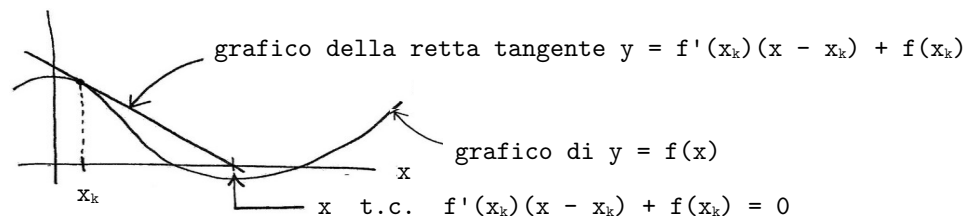
(1.67) Osservazione (interpretazione grafica del metodo di Newton).

Sia $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione con derivata prima e sia x_k un numero reale tale che $f'(x_k) \neq 0$. Si disegnino su uno stesso piano cartesiano il grafico della funzione f e quello della retta tangente al grafico di f in x_k (vedi figura). Poiché $f'(x_k) \neq 0$, la retta tangente non è orizzontale e quindi interseca l'asse delle ascisse nel punto $\underline{x}$ tale che:

$$f'(x_k)(\underline{x} - x_k) + f(x_k) = 0$$

ovvero in

$$\underline{x} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = h_N(x_k)$$



(1.68) Osservazione (criterio di scelta del punto iniziale per il metodo di Newton).

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ con derivata seconda continua tale che:

- (1) esiste α zero di f in $[a, b]$
- (2) per ogni $x \in [a, b]$ si ha $f'(x) \neq 0$ (e quindi α è l'unico zero di f in $[a, b]$)
- (3) $f''(x) \neq 0$ (f è convessa in $[a, b]$)

Allora: a partire da $\gamma =$ l'estremo di $[a, b]$ in cui f e f' hanno lo stesso segno, il metodo di Newton genera una successione in $[a, b]$ convergente ad α e monotona.

(Dimostrazione. Utilizzando le ipotesi, e ragionando graficamente, si mostra che la successione generata a partire da γ è monotona e limitata, e quindi convergente. Il limite non può che essere un punto unito di h_N in $[a, b]$, dunque α .)

(1.69) Osservazione.

Siano $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione con derivata seconda continua e α uno zero di f in $[a, b]$. Se $f'(\alpha) \neq 0$ (dunque il metodo di Newton applicato ad f è utilizzabile per approssimare α) allora esiste un intervallo I che verifica le ipotesi del criterio di scelta (1.67) se e solo se $f''(\alpha) \neq 0$.

(1.70) Osservazione (ordine di convergenza di un metodo ad un punto).

Siano $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, α un punto unito di h e x_k una successione convergente ad α generata dal metodo definito da h .

(1) Sia h con h' continua e $0 < |h'(\alpha)| < 1$. Allora:

- Sia $d > 0$ tale che $h'(x) \neq 0$ per ogni $x \in I(\alpha, d)$. Detti λ_d e L_d , rispettivamente, il minimo ed il massimo di $|h'(x)|$ su $I(\alpha, d)$ e $y_{n,d}$ la successione costituita dagli elementi di x_k in $I(\alpha, d)$, per ogni x in $I(\alpha, d)$ si ha:

$$\lambda_d \leq |h'(x)| \leq L_d$$

- Per ogni n si ha allora:

$$\lambda_d^n |y_{0,d} - \alpha| \leq |y_{n,d} - \alpha| \leq L_d^n |y_{0,d} - \alpha|$$

ovvero:

la successione $y_{n,d} - \alpha$ converge a zero più rapidamente della successione

$L_d^n |y_{0,d} - \alpha|$ ma *meno rapidamente* della successione $\lambda_d^n |y_{0,d} - \alpha|$

Scelto d molto piccolo si avrà $\lambda_d \approx L_d \approx |h'(\alpha)|$. Dunque

$$|y_{n,d} - \alpha| \approx |h'(\alpha)|^n |y_{0,d} - \alpha|$$

Questa proprietà della successione x_k si esprime dicendo che ' x_k converge ad α in modo esponenziale'.

(2) Sia $h(x) = \alpha + A(x - \alpha)^2$ con $A \neq 0$. Allora: α è punto unito di h e $h'(\alpha) = 0$. Inoltre, dato un numero reale x_0 , per ogni k si ha:

$$x_k - \alpha = A^{-1} (A(x_0 - \alpha))^2$$

Se $|A(x_0 - \alpha)| < 1$, la successione x_k converge ad α e, per ogni t in $(0,1)$ si ha

$$\frac{|x_k - \alpha|}{t^k} \longrightarrow 0 \quad \text{per } k \rightarrow \infty$$

ovvero: la successione $x_k - \alpha$ tende a zero *più rapidamente* di *qualsiasi* successione esponenziale.

In generale, se h ha derivata seconda continua e $h'(\alpha) = 0$, la successione x_k tende ad α *più rapidamente* di *qualsiasi* successione di tipo esponenziale.

Il sussistere della condizione ' h con h' continua e $0 < |h'(\alpha)| < 1$ ' si esprime con la frase *l'ordine di convergenza ad α del metodo definito da h è uno*. Il sussistere della condizione ' h con h'' continua, $h'(\alpha) = 0$ e $h^{(2)}(\alpha) \neq 0$ ' si esprime con la frase *l'ordine di convergenza ad α del metodo definito da h è due*. In generale:

l'ordine di convergenza ad α del metodo definito da h è p

significa

h ha derivata di ordine p continua, $h^{(m)}(\alpha) = 0$ per $m = 1, \dots, p-1$ e $h^{(p)}(\alpha) \neq 0$

Tanto più elevato è l'ordine di convergenza ad α del metodo, tanto più rapidamente convergono ad α le successioni generate dal metodo.