

(1.58) Osservazione.

L'uso del Teorema di convergenza (Teorema (1.57) della Lezione 9) richiede la verifica delle ipotesi (1) - (3). Per le ipotesi (1) e (2) occorre decidere se esiste, ed eventualmente determinare, un intervallo $[a,b]$ che contiene un solo punto unito di h e in tutti i punti x del quale $|h'(x)| \leq L$ con $0 \leq L < 1$. Una volta determinato un intervallo $[a,b]$ con le proprietà richieste, occorre decidere se sia verificata l'ipotesi (3), ovvero se a partire da γ il metodo definito da h genera una successione in $[a,b]$.

Il teorema e l'osservazione seguenti forniscono criteri concreti riguardo la verifica delle ipotesi.

(1.59) Teorema (utilizzabilità del metodo definito da h).

Sia $h:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione con derivata prima continua e α un punto unito di h in $[a,b]$. *Condizione necessaria e sufficiente* affinché esista un intervallo $I \subset [a,b]$ contenente α e in tutti i punti x del quale si abbia $|h'(x)| \leq L$ con $0 \leq L < 1$ è:

$$|h'(\alpha)| < 1$$

Dimostrazione.

La condizione è *necessaria*: se esiste un intervallo $I \subset [a,b]$ contenente α in tutti i punti x del quale $|h'(x)| \leq L$ con $0 \leq L < 1$, certamente si ha $|h'(\alpha)| < 1$.

La condizione è *sufficiente*: se $|h'(\alpha)| < 1$, per la continuità della funzione h' esistono un numero reale L con $0 \leq L < 1$ e un intervallo $I \subset [a,b]$ tali che $\alpha \in I$ e in tutti i punti $x \in I$ si ha $|h'(x)| \leq L$.

(1.60) Osservazione (criterio di scelta del punto iniziale).

Sia $h:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione con derivata prima continua che verifica le ipotesi (1) e (2) del Teorema di convergenza e sia α l'unico punto unito di h in $[a,b]$. Allora:

a partire da $\gamma = l'estremo di [a,b] più vicino ad \alpha$, il metodo definito da h genera una successione in $[a,b]$ - dunque convergente ad α .

Dimostrazione.

Posto $x_0 = \gamma$, sia $d = |x_0 - \alpha|$. Indicato con $I(\alpha, d)$ l'intorno di centro α e raggio d , si ha $I(\alpha, d) \subset [a,b]$. Per quanto mostrato nel punto (B) della dimostrazione del Teorema di convergenza, si ha $|x_1 - \alpha| < |x_0 - \alpha| = d$, quindi $x_1 \in I(\alpha, d)$. Allo stesso modo si dimostra che per ogni k si ha $x_k \in I(\alpha, d) \subset [a,b]$.

(1.61) Osservazione.

Siano $h:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione con derivata prima continua, α un punto unito di h e x_k una successione generata dal metodo definito da h . Se $|h'(\alpha)| > 1$ allora uno soltanto dei seguenti asserti sussiste:

- esiste $\bar{k}$ tale che per ogni $k \geq \bar{k}$ si ha $x_k = \alpha$
- $x_k \rightarrow \alpha$

(Dimostrazione solo in un caso particolare. Sia $h(x) = A(x - \alpha) + \alpha$ con $A > 1$. Si ha: α è l'unico punto unito di h , $h'(x) = A$ e

$$x_k - \alpha = A^k(x_0 - \alpha)$$

Allora: se $x_0 \neq \alpha$, per ogni $M > 0$ esiste n tale che $k \geq n \Rightarrow |x_k - \alpha| \geq M$. Dunque per ogni $x_0 \neq \alpha$ si ha $x_k \rightarrow \alpha$.)

L'eventualità di riuscire a determinare *concretamente* un punto iniziale a partire dal quale risulti $x_k = \alpha$ dopo un numero *finito* di termini è estremamente remota. Per questo motivo, se $|h'(\alpha)| > 1$ il metodo definito da h si dichiara *non utilizzabile* per approssimare α .

Resta da chiarire cosa accade se $|h'(\alpha)| = 1$. Vedremo che anche in questo caso il metodo definito da h si dichiara *non utilizzabile* per approssimare α .

Si osservi, infine, che la condizione $|h'(\alpha)| < 1$, necessaria e sufficiente per l'utilizzabilità del metodo per approssimare il punto unito α , è verificabile *graficamente* confrontando la pendenza ($h'(\alpha)$) della retta tangente al grafico di $y = h(x)$ in $x = \alpha$ con quella (1) della retta grafico di $y = x$ e con quella (-1) della retta $y = \alpha - x$.

(1.62) Esercizio.

Per ogni $x > 0$, sia $f(x) = x + \log(x)$. Si vuole (i) sapere se f ha qualche zero e, in caso affermativo: (ii) separare gli zeri e, infine, (iii) decidere se ciascuno dei metodi definiti da

$$h_1(x) = -\log(x) \quad ; \quad h_2(x) = \exp(-x) \quad ; \quad h_3(x) = (\exp(-x) + x)/2$$

sia utilizzabile per approssimare gli zeri di f .

Soluzione.

(i) La funzione $f(x)$ è continua, $f(x) \rightarrow -\infty$ quando $x \rightarrow 0$ e $f(x) \rightarrow +\infty$ quando $x \rightarrow +\infty$. Se ne deduce che f ha *almeno uno* zero. La funzione $f(x)$ è anche derivabile e per ogni $x > 0$ risulta $f'(x) \neq 0$. Allora f ha *al più uno* zero. Dunque f ha *uno* zero, α .¹

(ii) Si ha: $f(1) = 1$, dunque $\alpha \in [0,1]$, ovvero l'intervallo $[0,1]$ *separa* lo zero di f .

(iii) Si consideri la funzione $h_1(x)$. Si verifica facilmente che gli zeri di f sono tutti e soli i punti uniti di h_1 . Inoltre, h_1 è derivabile e per ogni $x > 0$ si ha $h_1'(x) = 1/x$. Essendo $\alpha \in (0,1)$ si ha certamente $|h_1'(\alpha)| > 1$. Per l'Osservazione (1.61) il metodo definito da h_1 *non è utilizzabile* per approssimare α .

Si consideri la funzione $h_2(x)$. Si verifica facilmente che gli zeri di f sono tutti e soli i

1 Sia $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione sufficientemente regolare. Se per ogni x in $[a,b]$ si ha

$$f^{(k)}(x) \neq 0$$

allora f ha *al più k zeri distinti* nell'intervallo $[a,b]$.

punti uniti di h_2 . Inoltre, h_2 è derivabile e per ogni x si ha $|h_2'(x)| = \exp(-x)$. Essendo $\alpha \in (0,1)$ si ha certamente $|h_2'(\alpha)| < 1$ e, per il Teorema (1.59), il metodo definito da h_2 è *utilizzabile* per approssimare α . In base all'Osservazione (1.60), per determinare un punto iniziale a partire dal quale il metodo definisce una successione convergente ad α è sufficiente determinare un intervallo chiuso I che verifica le ipotesi (1) e (2) del Teorema di convergenza. L'intervallo $[0,1]$ *non va bene* perché l'ipotesi (2) non è verificata: per ogni x in $(0,1]$ si ha $0 \leq |h_2'(x)| = \exp(-x) < 1$ ma $|h_2'(0)| = 1$. Allora, un intervallo che verifica anche l'ipotesi (2) è $[t,1]$ con $t \in (0,\alpha)$. Per determinare t si utilizza il Teorema di esistenza degli zeri. Siccome $f(1/2) < 0$, si pone $t = 1/2$ e $I = [1/2, 1]$. A questo punto è sufficiente decidere quale dei due estremi di I è più vicino allo zero. Si utilizza ancora il Teorema di esistenza degli zeri. Siccome $f(3/4) > 0$, si sceglie $x_0 = 1/2$.

Si osservi che, in questo caso, per ogni x in $I = [1/2, 1]$ la derivata prima della funzione che definisce il metodo è *negativa*. Poiché, si riveda la dimostrazione dell'asserto (B) del Teorema di convergenza, per ogni k si ha:

$$x_k - \alpha = h'(t_{k-1})(x_{k-1} - \alpha)$$

per qualche numero reale t_{k-1} in I , allora per ogni k è $h'(t_{k-1}) < 0$ e le differenze $x_k - \alpha$ e $x_{k-1} - \alpha$ hanno *segno opposto*. Ne segue che gli elementi della successione si trovano, alternativamente, a destra e a sinistra di α : la successione 'oscilla' intorno allo zero. La successione delle *distanze* $|x_k - \alpha|$ è comunque *monotona decrescente* come mostrato nella dimostrazione del Teorema di convergenza.

Si consideri infine la funzione $h_3(x)$. Si verifica facilmente che gli zeri di f sono tutti e soli i punti uniti di h_3 . Inoltre, h_3 è derivabile e per ogni x si ha:

$$|h_3'(x)| = (1 - \exp(-x))/2$$

Essendo $\alpha \in (1/2,1)$ si ha certamente $|h_3'(\alpha)| < 1$ e, per il Teorema (1.59), il metodo definito da h_3 è *utilizzabile* per approssimare α . In base all'Osservazione (1.60), per determinare un punto iniziale a partire dal quale il metodo definisce una successione convergente ad α è sufficiente determinare un intervallo chiuso I che verifica le ipotesi (1) e (2) del Teorema di convergenza. L'intervallo $I = [1/2,1]$ va bene, infatti per ogni x in I si ha $0 \leq |h_3'(x)| < 1$. A questo punto è sufficiente decidere quale dei due estremi di I è più vicino allo zero. Procedendo come nel caso precedente, si sceglie $x_0 = 1/2$.

Si osservi che, in questo caso, per ogni x in $I = [1/2, 1]$ la derivata prima della funzione che definisce il metodo è *positiva*. Ragionando come nel caso precedente, le differenze $x_k - \alpha$ e $x_{k-1} - \alpha$ hanno *lo stesso segno*. Ne segue che gli elementi della successione si trovano tutti dalla stessa parte rispetto ad α . Inoltre, anche in questo caso, la successione delle *distanze* $|x_k - \alpha|$ è *monotona decrescente*, e quindi la successione x_k risulta *monotona* (*crescente* se x_0 è a sinistra di α , *decrescente* nel caso opposto). Infine, si osservi che poiché per ogni x in $I = [1/2, 1]$ la derivata prima della funzione che definisce il metodo è positiva, dalla dimostrazione del criterio di scelta del punto iniziale (Osservazione (1.60)) si deduce che *per ogni* x_0 *in* I la successione x_k converge ad α .

(1.63) Esercizio (per casa).

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ sia: $h(x) = 2 \operatorname{arctg}(x)$.

- (1) Determinare il numero di punti uniti di h e separarli.
- (2) Per ciascuno dei punti uniti, decidere se il metodo iterativo definito da h sia utilizzabile per l'approssimazione e, in caso affermativo, indicare un punto iniziale a partire dal quale la successione generata converge al punto unito in esame.
- (3) Rispondere alle domande precedenti utilizzando i metodi grafici, aiutandosi con *Scilab*.