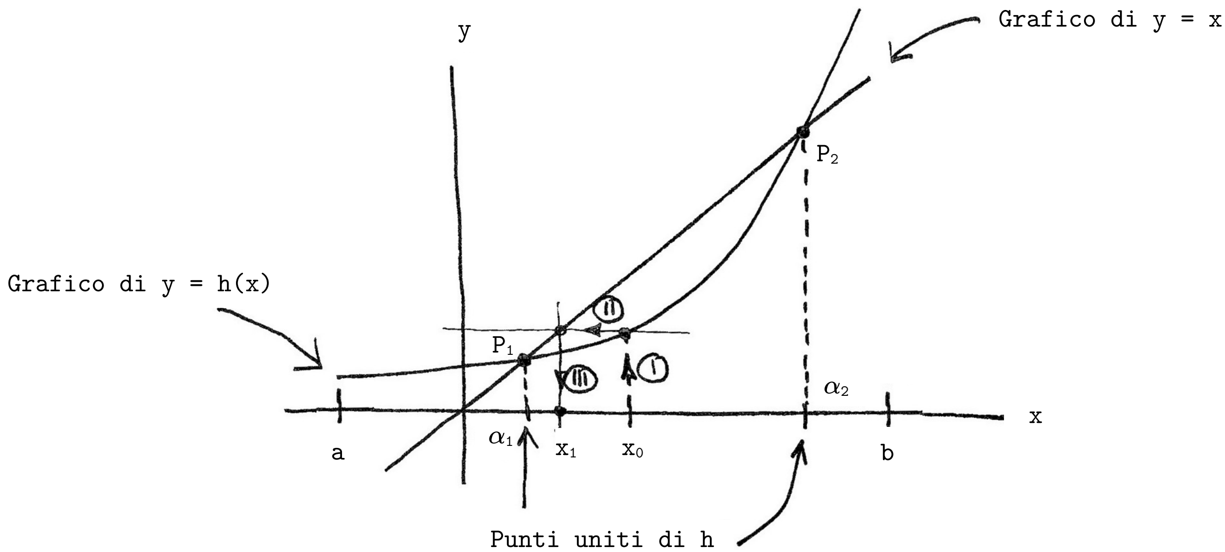
Lezione 9 (ore 15,16) - 9 ottobre 2025, 8:30 - 10:30 F3

(1.56) Osservazione (costruzioni grafiche).



Si rappresentino su uno stesso piano cartesiano le porzioni del grafico della funzione $y = h(x)$ che definisce il metodo ad un punto da esaminare e della retta grafico della funzione $y = x$, su un intervallo $[a,b]$.

I punti uniti di h sono le ascisse (α_1 e α_2) dei punti P_1 e P_2 comuni ai due grafici.

Assegnato il punto dell'asse delle ascisse che rappresenta x_0, possiamo costruire il punto dello stesso asse che rappresenta x_1 in tre passaggi: (I) si determina il punto $(x_0,h(x_0)) = (x_0,x_1)$ intersezione tra il grafico di $y = h(x)$ e la retta verticale per $(x_0,0)$; (II) si determina il punto $(h(x_0),h(x_0)) = (x_1,x_1)$ intersezione tra il grafico di $y = x$ e la retta orizzontale per il punto $(x_0,h(x_0))$ determinato al passaggio precedente; (III) si determina il punto $(h(x_0),0) = (x_1,0)$ intersezione tra l'asse delle ascisse e la retta verticale passante per (x_1,x_1).

(1.57) Teorema (di convergenza).

Siano $h:[a,b] \to R$ una funzione con derivata prima continua e γ un punto di $[a,b]$ tali che:

(1) esiste un punto unito α di h in $[a,b]$;
(2) esiste un numero reale $L \in [0,1)$ tale che: per ogni $x \in [a,b]$ si ha $|h'(x)| \leqslant L$;
(3) la procedura MetodoUnPunto(h,a,b,γ) definisce una successione x_k.[1]

Allora si ha:

(A) α è l'*unico* punto unito di h in $[a,b]$;
(B) la successione x_k è *convergente* al limite α.

(1.58) Dimostrazione (del Teorema (1.57)).

1 Ovvero, per ogni k si ha: se $x_k \in [a,b]$ allora $x_{k+1} \in [a,b]$.

(A) Per assurdo. Se β è un altro punto unito di h in [a,b] si ha (utilizzando prima la definizione di punto unito e poi il Teorema di Lagrange):

$$\beta - \alpha = h(\beta) - h(\alpha) = h'(t)(\beta - \alpha) \quad , \quad \text{con } t \text{ numero reale compreso tra } \alpha \text{ e } \beta$$

Infine, ricordando che $\beta - \alpha \neq 0$, si ottiene:

$$(\#) \qquad\qquad h'(t) = 1$$

Ma, siccome α e β sono punti in [a,b], anche t lo è. Allora, per l'ipotesi (2), l'uguaglianza (#) è assurda.

Si osservi che per questa dimostrazione si sono utilizzate *solo* le ipotesi (1) e (2).

(B) Si deve dimostrare che la successione x_k tende ad α, ovvero che la successione $x_k - \alpha$ tende a zero. Si ha, utilizzando il Teorema di Lagrange per la seconda uguaglianza:

$$x_k - \alpha = h(x_{k-1}) - h(\alpha) = h'(t_{k-1})(x_{k-1} - \alpha) \quad \text{con} \quad t_{k-1} \text{ tra } x_{k-1} \text{ e } \alpha$$

Passando ai valori assoluti si ha (la disuguaglianza si ottiene utilizzando l'ipotesi (2)):

$$|x_k - \alpha| = |h'(t_{k-1})|\ |x_{k-1} - \alpha| \leqslant L\ |x_{k-1} - \alpha|$$

Se $k - 1 > 0$ si può ripetere il ragionamento a partire da $x_{k-1} - \alpha$ per ottenere:

$$|x_{k-1} - \alpha| = |h'(t_{k-2})|\ |x_{k-2} - \alpha| \leqslant L\ |x_{k-2} - \alpha|$$

e, sostituendo nella precedente:

$$|x_k - \alpha| \leqslant L^2\ |x_{k-2} - \alpha|$$

Iterando all'indietro fino al primo elemento della successione si ricava:

$$|x_k - \alpha| \leqslant L^k\ |x_0 - \alpha|$$

Ricordando che $0 \leqslant L < 1$ si ottiene il risultato cercato:

$$\lim_{k \to \infty} |x_k - \alpha| = 0$$