Lezione 8 (ore 13,14) - 8 ottobre 2025, 11:30 - 13:30 A13

(1.48) Esempio (approssimazione numerica della derivata).

Si supponga di conoscere, agli istanti t_1 e t_2, le posizioni x_1 e x_2 di un punto in moto su una retta. La quantità:

$$\bar{v} = (x_2 - x_1) / (t_2 - t_1)$$

è la velocità media del punto tra i due istanti. Se le quantità x_1 e x_2 sono note soltanto con errore relativo ε_1 e ε_2, ad esempio perché ottenute tramite misurazioni, potremo ottenere di $\bar{v}$ soltanto un'approssimazione:

$$w = \frac{(1 + \varepsilon_2)x_2 - (1 + \varepsilon_1)x_1}{t_2 - t_1}$$

L'errore relativo commesso approssimando $\bar{v}$ con w è:

$$\frac{w - \bar{v}}{\bar{v}} = \frac{x_2}{x_2 - x_1}\,\varepsilon_2 + \frac{x_1}{x_2 - x_1}\,\varepsilon_1$$

Nel caso in cui la differenza $x_2 - x_1$ sia piccola (ad esempio quando $\bar{v}$ sia utilizzato come stima della velocità istantanea di un punto mobile con velocità elevata), per quanto mostrato nell'Osservazione precedente, il calcolo risulta *mal condizionato* e l'errore commesso approssimando $\bar{v}$ con w risulterà molto maggiore dei singoli errori ε_1 e ε_2.

(1.49) Esercizio.

La scrittura:

$$\text{(A)} \qquad x = a + \delta \quad \text{con} \quad |\,\delta\,| \leqslant d$$

è *equivalente* alla scrittura:

$$\text{(B)} \qquad x \in [a - d\ ,\ a + d]$$

Si vogliono determinare y e E in modo che anche la scrittura:

$$(*) \qquad x = (1 + \varepsilon)y \quad \text{con} \quad |\,\varepsilon\,| \leqslant E$$

risulti equivalente ad (A) e (B).

La scrittura (*) equivale a:

$$x \in [(1 - E)y\ ,\ (1 + E)y]$$

Quest'ultima scrittura è equivalente alla (B) se e solo se:

$$(1 - E)y = a - d \quad \text{e} \quad (1 + E)y = a + d$$

Risolvendo il sistema si determina:

$$y = a \quad e \quad E = d / a$$

Quindi le scritture (A) e (B) sono equivalenti alla scrittura:

$$\text{(C)} \qquad x = (1 + \varepsilon)a \quad \text{con} \quad |\ \varepsilon\ | \leqslant d / a$$

(1.50) <u>Teorema</u> (stabilità della procedura *bisezione*).

Si consideri la realizzazione in *Scilab*[1], della procedura *bisezione*.

<u>Se</u> l'assegnamento

[z,v,info] = bisezione(f,a,b,delta)

termina con info = 0 oppure info = 1, <u>allora</u>:

$$|\ z - \alpha^*\ | \leqslant \text{delta}$$

dove α^* è uno zero di una funzione g 'vicina' alla funzione f nel senso che:

per ogni x in [a,b] si ha |f(x) - g(x)| 'piccolo'

Informalmente: se info = 0 oppure info = 1 allora la procedura restituisce una *buona approssimazione* di uno zero di una funzione *vicina* a quella in esame.

(<u>Dimostrazione</u> omessa.)

(1.51) <u>Osservazione</u> (condizionamento degli zeri di una funzione regolare).

Siano f:[a,b] → R regolare (derivabile con f' continua) con $f' \neq 0$ e f(a)f(b) < 0, α l'unico zero di f in [a,b], g:[a,b] → R continua e 'vicina' ad f, precisamente tale che:

per ogni x in [a,b] si ha $|f(x) - g(x)| \leqslant d$ con d 'piccolo' e d < min{|f(a)|,|f(b)|}

Per le ipotesi fatte, g ha *almeno uno* zero in [a,b]. Si vuole sapere *quanto distante può essere lo zero* α *di* f *da uno zero di* g.

Sia α^* uno zero di g in [a,b]. Allora si ha (utilizzando il Teorema di Lagrange):

$$f(\alpha^*) = f(\alpha^*) - f(\alpha) = f'(t)(\alpha^* - \alpha) \quad \text{con} \quad t \text{ tra } \alpha^* \text{ e } \alpha$$

Dunque, posto m = min{ |f'(x)|, x in [a,b] }, si ha:

$$|\alpha^* - \alpha| = \frac{|f(\alpha^*)|}{|f'(t)|} \leqslant \frac{|f(\alpha^*)|}{m}$$

Infine, essendo:

---

1 Asserto (1.08) nella Lezione 2.

$$|f(\alpha^*)| = |f(\alpha^*) - g(\alpha^*)| \leqslant d$$

si ottiene:

$$|\alpha^* - \alpha| \leqslant \frac{d}{m}$$

La quantità $1/m$ ha il ruolo di *numero di condizionamento*: tanto più è grande tanto più gli zeri di g possono essere lontani dallo zero di f.

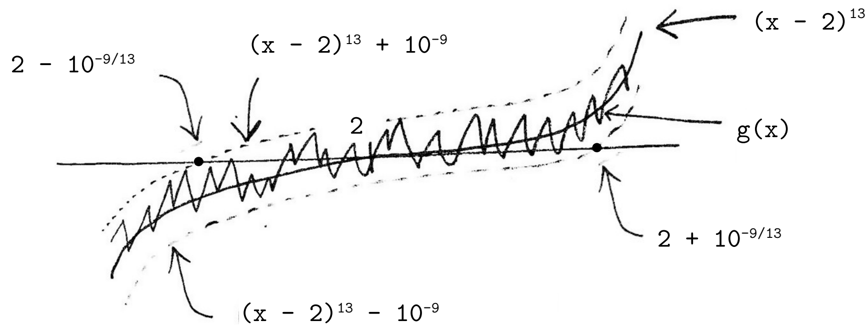
Se $f'(x) = 0$ per qualche x in [a,b], in particolare se $f'(\alpha) = 0$, il condizionamento è certamente *cattivo*, come evidenziato nell'esempio seguente.

(1.52) Esempio.

Sia $f(x) = (x - 2)^{13}$. La funzione ha un solo zero, $\alpha = 2$, ed è regolare nell'intervallo [1,3]. Si consideri poi $g:[1,3] \to R$ continua tale che:

$$\text{per ogni } x \text{ in } [1,3] \text{ si ha } |f(x) - g(x)| \leqslant 10^{-9}$$

Un esempio di grafico di g è rappresentato in figura.



Nel caso *peggiore* la distanza tra lo zero α di f e uno zero α^* di g è $10^{-9/13} \approx 0.2$, *molto più grande* della distanza 10^{-9} tra f e g.

(1.1) METODI AD UN PUNTO

Il punto di forza del metodo di bisezione è la sua generalità: può essere applicato a *qualunque* funzione che sia semplicemente continua e che assuma valori di segno opposto agli estremi di un intervallo. Per contro, in alcune applicazioni il metodo richiede un *numero eccessivo di iterazioni* per ottenere l'accuratezza richiesta dall'utilizzatore. Per ovviare a questo inconveniente, analizziamo altri metodi per approssimare lo zero di una funzione: i *metodi ad un punto*.

(1.53) Definizione (metodo ad un punto).

Sia $h:[a,b] \to R$ una funzione continua. Il *metodo ad un punto definito da* h è la seguente procedura:

z = *MetodoUnPunto*(h,a,b,γ)

<u>ingresso</u>: h:[a,b] → R continua, γ in [a,b]

- x(0) = γ;
- <u>per</u> k = 1,2,3,... <u>ripeti</u>
  <u>se</u> x(k-1) in [a,b] <u>allora</u> x(k) = h(x(k-1)) <u>altrimenti</u> STOP

<u>uscita</u>: quando un opportuno *criterio d'arresto* è verificato: z = x(k).

(1.54) <u>Osservazione</u>.

Se omettiamo il criterio d'arresto e per ogni k si x(k-1) in [a,b], il metodo ad un punto definisce una successione x(0), x(1), x(2),... <u>Se</u> la successione è *convergente*, il limite è un *punto unito di* h.[2]

(<u>Dimostrazione</u>. La successione x(0), x(1), x(2),... è identica alla successione h(x(0)), h(x(1)), h(x(2)),... Quindi quest'ultima è convergente e, detto α il limite della successione x(k):

$$\lim_{k\to\infty} h(x(k)) = \alpha$$

Poiché h è una funzione continua e la successione x(k) converge ad α, si ha:

$$\lim_{k\to\infty} h(x(k)) = h(\lim_{k\to\infty} x(k)) = h(\alpha)$$

Per l'unicità del limite di una successione convergente, si deduce che α = h(α).)

(1.55) <u>Osservazione</u>.

Sia f la funzione continua della quale si è interessati ad approssimare qualche zero. Per quanto detto nell'Osservazione precedente, il metodo ad un punto definito da h è utilizzabile, 'se tutto va bene', per approssimare *un punto unito* di h. Perché il metodo ad un punto possa essere utilizzato per approssimare qualche zero di f occorre *scegliere* la funzione h che lo definisce in modo che:

(#) {zeri di f} = {punti uniti di h}

Ci si domanda *se esistono* funzioni (continue) h con la proprietà richiesta.

Si consideri la funzione h così definita:

$$h(x) = f(x) + x$$

Se α è zero di f, ovvero f(α) = 0, si ha:

$$h(\alpha) = f(\alpha) + \alpha = \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha \text{ è punto unito di } h$$

---

2 Il numero reale α è un *punto unito di* h significa che α = h(α).

Viceversa, se α è punto unito di h (ovvero α = h(α)), si ha:

$$h(\alpha) = f(\alpha) + \alpha \;\Rightarrow\; f(\alpha) = 0 \;\Rightarrow\; \alpha \text{ zero di } f$$

La funzione h è quindi *una* funzione che verifica la proprietà (#).

Si verifica facilmente che, se g è una funzione continua tale che g(x) $\neq$ 0 per ogni x, la funzione h definita da:

$$h(x) = g(x)f(x) + x$$

è continua ed ha la proprietà (#). Dunque esistono *infinite* funzioni h che hanno come punti uniti tutti e soli gli zeri di f.

Si pone adesso il problema di scegliere, tra tutte le possibili funzioni che hanno la proprietà (#), una h in modo che il metodo da essa definito generi una successione *convergente*.