Lezione 7 (ore 11,12) - 7 ottobre 2025, 16:30 - 18:30 F3

(1.44) Osservazione (stabilità, caso non elementare).

Siano f_1, f_2:R → R due funzioni elementari e φ_1, φ_2:R → M gli algoritmi utilizzati per approssimare, rispettivamente, i valori di f_1 ed f_2. Siano poi x ∈ R, $f(x) = f_2(f_1(x))$ e $\varphi(x) = \varphi_2(\varphi_1(x))$. Infine, supponiamo che gli algoritmi φ_1, φ_2 siano *stabili* su R. Ci si domanda se l'algoritmo φ è stabile quando utilizzato per approssimare f in x. Utilizzando la stabilità di φ_1 e φ_2 si ha: esistono numeri reali $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_4$ tali che $|\varepsilon_j| \leqslant u$, j = 1,2,3,4 e:

$$\varphi(x) = \varphi_2(\varphi_1(x)) = (1 + \varepsilon_4)f_2(\ (1 + \varepsilon_3)(1 + \varepsilon_1)f_1((1 + \varepsilon_2)x)\ )$$

Posto $(1 + \varepsilon_3)(1 + \varepsilon_1) = 1 + t$, ovvero $t = \varepsilon_3 + \varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3$, si ha: $|t| \leqslant 2u + u^2$ (< 1) e

$$\varphi(x) = (1 + \varepsilon_4)f_2(\ (1 + t)f_1((1 + \varepsilon_2)x)\ )$$

Indicato con ϑ l'errore relativo commesso approssimando $f_2(\ f_1((1 + \varepsilon_2)x)\ )$ con $f_2(\ (1 + t)f_1((1 + \varepsilon_2)x)\ )$ si riscrive:

$$f_2(\ (1 + t)f_1((1 + \varepsilon_2)x)\ ) = (1 + \vartheta)f_2(\ f_1((1 + \varepsilon_2)x)\ )$$

e quindi:

$$\varphi(x) = (1 + \varepsilon_4)(1 + \vartheta)f_2(\ f_1((1 + \varepsilon_2)x)\ )$$

Infine, posto $(1 + \varepsilon_4)(1 + \vartheta) = 1 + \varepsilon_v$ e $\varepsilon_2 = \varepsilon_a$, si ottiene:

$$\varphi(x) = (1 + \varepsilon_v)f((1 + \varepsilon_a)x)$$

Per poterne dedurre la stabilità di φ quando utilizzato per approssimare f in x, occorre indagare la grandezza delle perturbazioni ε_v e ε_a. Riguardo ad ε_a si ha $|\varepsilon_a| \leqslant u$, dunque ε_a 'piccolo'. La grandezza di ε_v, invece, *dipende* da quella di ϑ che, a sua volta *dipende* dal condizionamento del calcolo di f_2 in $f_1((1 + \varepsilon_2)x)$. Se quest'ultimo calcolo è *ben condizionato* (dunque ϑ 'piccolo') allora φ è stabile quando utilizzato per approssimare f in x, altrimenti nulla si può dire riguardo alla stabilità di φ.

(1.45) Osservazione (condizionamento del calcolo di funzioni regolari).

Siano f:A → R una funzione *regolare* (ovvero con derivata prima continua), e x ∈ A tale che $f(x) \neq 0$. Si vuole studiare il condizionamento del calcolo di f in x.

Poiché $f(x) \neq 0$, per quanto detto nell'Osservazione (1.41) della Lezione 6, si deve studiare, assegnato $\alpha \in R$ 'piccolo', la quantità:

$$\varepsilon_V = \frac{f(\ (1+\alpha)x\ ) - f(x)}{f(x)}$$

Per la regolarità di f, utilizzando il Teorema di Lagrange, si ha:

esiste un numero reale ϑ compreso tra x e $(1 + \alpha)x$ tale che

$$f(\ (1+\alpha)x\ ) - f(x) = f'(\vartheta)\ \alpha\, x$$

Quindi si riscrive:

$$\varepsilon_V = \frac{f'(\vartheta)\ \alpha\, x}{f(x)}$$

Per l'ipotesi α 'piccolo' si può ragionevolmente approssimare $\vartheta \approx x$ e riscrivere infine:

$$\varepsilon_V \approx \frac{f'(x)}{f(x)}\ x\ \alpha$$

Introdotto il *numero di condizionamento* del calcolo di f in x:

$$c(x) = \left| \frac{f'(x)}{f(x)} x \right|$$

si ha allora:

$$|\ \varepsilon_V\ | \approx c(x)\ |\ \alpha\ |$$

e il condizionamento del calcolo di f in x dipende solo dalla grandezza del numero di condizionamento c(x).

(1.46) <u>Esempio</u>.

Sia f(x) = sen(x) e $x \in (0, \pi/2)$. Il numero di condizionamento del calcolo di f in x è:

$$c(x) = \left| \frac{\cos(x)}{\mathrm{sen}(x)} x \right| = \left| \frac{x}{\tan(x)} \right| = \frac{x}{\tan(x)} < 1$$

Dunque in questo caso il calcolo di sen(x) è *ben condizionato*. <u>Ma</u> se consideriamo x *vicino* (ma non uguale) a π, tenuto conto che:

$$\lim_{t\to\pi} c(x) = \lim_{t\to\pi} \left| \frac{x}{\tan(x)} \right| = +\infty$$

il calcolo di sen(x) *non è* ben condizionato.

(1.47) Osservazione (condizionamento delle operazioni aritmetiche).

Siano $f(x_1,x_2) = x_1 + x_2$ e x_1, x_2 tali che $f(x_1,x_2) \neq 0$. Si vuole studiare il condizionamento del calcolo di f in x_1, x_2.

Poiché $f(x_1, x_2) \neq 0$, per quanto detto nell'Osservazione (1.41) della Lezione 6, si deve studiare, assegnati numeri reali α_1 e α_2 'piccoli', la quantità:

$$\varepsilon_V = \frac{(1 + \alpha_1)\, x_1 + (1 + \alpha_2)\, x_2 - (x_1 + x_2)}{x_1 + x_2} = \frac{x_1}{x_1 + x_2}\,\alpha_1 + \frac{x_2}{x_1 + x_2}\,\alpha_2$$

Introdotti i numeri di condizionamento:

$$c_1(x_1,x_2) = \left|\frac{x_1}{x_1+x_2}\right| \quad \text{e} \quad c_1(x_1,x_2) = \left|\frac{x_2}{x_1+x_2}\right|$$

si ha:

se $x_1x_2 > 0$ (ovvero i due addendi hanno lo stesso segno) allora:

$$c_1(x_1,x_2) < 1 \quad \text{e} \quad c_2(x_1,x_2) < 1$$

e il condizionamento del calcolo della somma è *buono*. Invece, se $x_1x_2 < 0$ (ovvero i due addendi hanno lo segno opposto), il condizionamento del calcolo può essere *tanto peggiore quanto più piccolo è* $x_1 + x_2$. Si ha infatti, assegnato $x_1 \neq 0$ e posto $x_2 = y - x_1$ (ovvero $x_1 + x_2 = y$) con $y \neq 0$:

$$c_1(x_1,x_2) = \left|\frac{x_1}{y}\right| \quad , \quad c_1(x_1,x_2) = \left|1-\frac{x_1}{y}\right|$$

e:

$$\lim_{y \to 0} c_1(x_1, x_2) = +\infty \quad , \quad \lim_{y \to 0} c_2(x_1, x_2) = +\infty$$

Nel caso delle altre operazioni aritmetiche si ha:

$$\varepsilon_V = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_1\,\alpha_2 \qquad \text{(moltiplicazione)}$$

$$\varepsilon_V = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{1 - \alpha_2} \qquad \text{(divisione)}$$

e in entrambi i casi il calcolo è *sempre ben condizionato.*