

(1.22) Osservazione (conseguenze di $F(2,53) \neq \mathbb{R}$).

Indichiamo con M l'insieme dei numeri che il calcolatore sa manipolare, i 'numeri di macchina' del calcolatore. Quale insieme sia esattamente M dipende dal calcolatore che si considera. Nel caso di *Scilab* (e *Octave* e *Matlab*) l'insieme M è 'sostanzialmente' $F(2,53)$. Riservandoci di chiarire più avanti le differenze tra i due insiemi, assumiamo che:

in *Scilab* si ha $M = F(2,53)$

Consideriamo i seguenti esempi (il carattere $>$ è il *prompt* della *console* di *Scilab*).

- $> x = 0.1;$

Poiché $0.1 =$ un decimo $\notin F(2,53)$, dopo l'assegnamento il valore di x non può essere un decimo.

- $> (1 - 9/10) * 10 - 1$
ans = - 2.220D-16

Si ha: $1, 9, 10 \in F(2,53)$ ma nove decimi $\notin F(2,53)$. Ovvero:

esistono $x, y \in F(2,53)$ t.c. $x/y \notin F(2,53)$

- Sia $f(x) = \frac{x(x-1)}{x - \sqrt{x}}$, definita per $x > 0$ e $x \neq 1$.

$$(A) \text{ Si ha: } f(x) = \frac{x^2 - x}{x - \sqrt{x}} = \frac{(x + \sqrt{x})(x - \sqrt{x})}{x - \sqrt{x}} = x + \sqrt{x}$$

(B) Per $x = 2 \in F(2,53)$ si ha:

- $> a = 2 * (2 - 1)/(2 - \sqrt{2});$
- $> b = 2 + \sqrt{2};$
- $> a == b$
- ans = F

(1.23) Definizione (funzione arrotondamento).

Il calcolatore usa gli elementi di $F(\beta, m)$ per *approssimare* numeri reali. L'approssimazione è realizzata dalla *funzione arrotondamento* $rd: \mathbb{R} \rightarrow F(\beta, m)$ così definita:

$rd(x) =$ l'elemento di $F(\beta, m)$ più vicino ad x o, in caso di ambiguità, quello dei due elementi di $F(\beta, m)$ equidistanti da x che ha la frazione che termina con una *cifra pari*.

(1.24) Osservazione.

La definizione è ben posta se β è pari e $m \geq 2$. In tal caso, se l'ultima cifra della frazione di $\xi \in F(\beta, m)$ è *pari* (rispettivamente: *dispari*), l'ultima cifra della frazione del successore di ξ è *dispari* (rispettivamente: *pari*).

Se β è pari e $m = 1$ oppure β è dispari, invece, la definizione non è ben posta. Ad esempio, in $F(3, 2)$ gli elementi positivi con esponente zero sono:

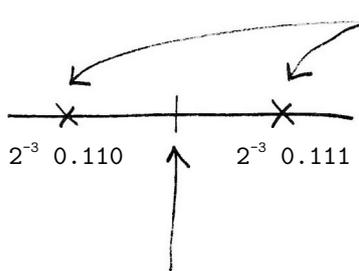
$$3^0 0.10 ; 3^0 0.11 ; 3^0 0.12 ; 3^0 0.20 ; \dots$$

e gli ultimi due elementi scritti sono consecutivi ed hanno *entrambi* l'ultima cifra della frazione *pari*.

(1.25) Esempio.

Sia $x = 1/10$. Si vuole determinare l'arrotondato di x in $F(2, 3)$.

Si è già determinato (Esempio (1.15)) che: $x = 2^{-3} 0.\overline{1100}$. Allora si ha la situazione di figura:



elementi di $F(2, 3)$ *adiacenti* ad x (quello a sinistra si ottiene *troncando* la scrittura della frazione di x al numero di cifre indicato dalla precisione - in questo caso 3 - quello a destra è il successore)

$$\text{punto medio} = 2^{-3} 0.1101 > x \Rightarrow \text{rd}(x) = 2^{-3} 0.110 (= 3/32)$$

(1.26) Osservazione.

La funzione *rd* non è una funzione che il calcolatore mette a disposizione dell'utilizzatore, ma è indispensabile per capire come:

- (1) il calcolatore 'legge' i numeri reali;
- (2) il calcolatore fa operazioni sugli elementi di $F(\beta, m)$.

(1.27) Esempio.

Riprendiamo il primo esempio dell'Osservazione (1.22). In *Scilab* l'effetto dell'assegnamento:

```
> x = 0.1
```

è: viene assegnata alla variabile x il valore $\text{rd}(0.1) \in F(2, 53)$ (se al momento dell'assegnamento la variabile x non esistesse, viene creata).

Il calcolatore approssima il numero reale con il suo arrotondato in $F(\beta, m)$. Ci si domanda quale errore venga commesso.

all'espressione $\xi + \vartheta$. Per definizione si ha:

$$\xi \oplus \vartheta = \text{rd}(\xi + \vartheta)$$

Il valore è definito 'nel modo migliore possibile' nel senso che l'errore tra il valore esatto $\xi + \vartheta$ e quello definito $\xi \oplus \vartheta$ è *il minimo possibile*.

Torniamo all'esempio. Il valore che *Scilab* assegna a c è, allora:

$$1/2 \oplus \text{nearfloat}(\text{'succ',1})/2 = \text{rd}(1/2 + \text{nearfloat}(\text{'succ',1})/2)$$

che, secondo la definizione di arrotondamento, vale 1 (quello, tra i due elementi adiacenti al numero da arrotondare, che ha ultima cifra della frazione *pari*).

Quello che accade nel primo assegnamento è:

