Lezione 4 (ore 5,6) - 30 settembre 2025, 16:30 - 18:30 F3

(1.16) Definizione (numeri in virgola mobile e precisione finita).

Siano β un numero intero maggiore o uguale a due e m un numero intero maggiore o uguale a 1. L'insieme

$$F(\beta,m) = \{0\} \cup \{x \text{ in } R \text{ t.c. } x = (-1)^s \beta^b \, 0.c_1 \ldots c_m \text{ con}$$
$$s \in \{0,1\},\ b \in Z,\ c_1,\ldots,c_m \text{ cifre in base } \beta,\ c_1 \neq 0\}$$

si chiama 'insieme dei numeri in *virgola mobile* e *precisione* m in base β'.

(1.17) Esempio.

Si consideri F(10,1).

- $1/100 \in F(10,1)$: $1/100 = 10^{-2} = 10^{-1}\ 0.1$
- $11/100 \notin F(10,1)$: $11/100 = 0.11 = 10^{0}\ 0.11$ e la frazione 0.11 non è compatibile con la precisione m = 1
- tutti gli elementi di F(10,1) positivi con esponente zero:

  $$B = \{0.1\ ;\ 0.2\ ;\ \ldots\ ;\ 0.9\}$$

  tutti quelli con esponente $b \in Z$:

  $$10^b\ B \text{ (positivi)} \qquad -10^b\ B \text{ (negativi)}$$

- $F(10,1) = \bigcup_{b \in Z} (-1)\ 10^b\ B \cup \{0\} \cup \bigcup_{b \in Z} 10^b\ B$

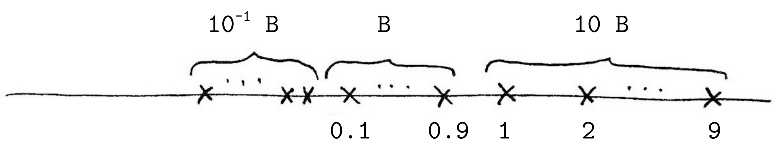
(1.18) Osservazione (proprietà di $F(\beta,m)$).

(1) è *sottoinsieme proprio* di Q (dunque numerabile e ordinato)
(2) è *simmetrico* rispetto a zero
(3) zero è (l'unico) punto di accumulazione
(4) $\sup F(\beta,m) = +\infty$, $\inf F(\beta,m) = -\infty$

(1.19) Osservazione (distanza tra elementi consecutivi).

In F(10,1):

(positivi)



Distanza tra consecutivi: $10^{-1}\ 0.1$ (b = -1), $0.1 = 10^{0}\ 0.1$ (b = 0), $1 = 10^{1}\ 0.1$ (b = 1).

- esponente b, distanza tra consecutivi in F(10,1): $10^b\ 0.1 = 10^b\ 10^{-1}$

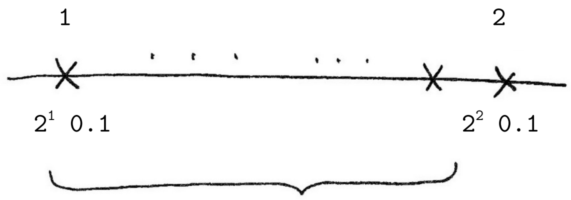
- in $F(\beta,m)$: dato $\xi = \beta^b$ g e detto $\sigma(\xi)$ il *successore* di ξ si ha:

$$\sigma(\xi) - \xi = \beta^{b-m}$$

- la distanza è tanto maggiore quanto l'esponente è grande ('tanto più ξ è lontano da zero').

(1.20) <u>Osservazione</u>.

Nell'Esempio (1.10) della Lezione 3, la situazione è:



* $\alpha \in (1,2)$

* in *Scilab* (*Octave, Matlab*):

F(2,53)

b = 1 $\Rightarrow$ distanza tra consecutivi = $2^{1-53} = 2^{-52} \approx 2.22\ 10^{-16}$

- Nel caso E = 10^{-16} la *function bisezione* ha trovato l'intervallo (non degenere) più piccolo possibile che contiene lo zero α e di estremi in F(2,53), <u>ma</u> questo intervallo ha misura > E.
- È *inutile* scegliere E < β^{b-m}.

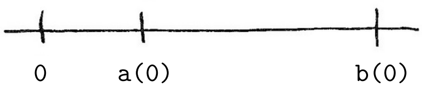
(1.21) <u>Criterio d'arresto</u> (con richiesta sull'errore relativo).

Dato E numero reale *positivo*...

$$\underline{\text{se}}\ \frac{\text{mis } I(k)}{\min\{|a(k)|,|b(k)|\}} < E \quad \underline{\text{allora}}\ \text{STOP}$$

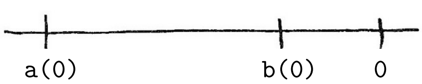
Proprietà del criterio d'arresto:

(1) la condizione è *calcolabile*
(2) <u>se</u> $0 \notin I(0)$ si ha: per ogni k, $0 \notin I(k)$ e

- 

$\Rightarrow$ $\min\{|a(k)|,|b(k)|\} = a(k) > 0$

  e $a(0) \leqslant a(k) < b(0)$ $\Rightarrow$ quando $k \to \infty$, mis $I(k)$ / $a(k) \to 0$

- 

$\Rightarrow$ $\min\{|a(k)|,|b(k)|\} = |b(k)| > 0$

  e $|b(0)| \leqslant b(k) < |a(0)|$ $\Rightarrow$ quando $k \to \infty$, mis $I(k)$ / $|b(k)| \to 0$

quindi: la condizione è *certamente verificata* dopo un numero *finito* di iterazioni (criterio *efficace*).

(3) se f è continua allora:

- esiste $\alpha \in I(k)$ zero di f

- $$\frac{|x(k) - \alpha|}{|\alpha|} \leqslant \frac{\text{mis } I(k) / 2}{|\alpha|} < 1/2 \frac{\text{mis } I(k)}{\min\{|a(k)|,|b(k)|\}} < E/2 < E$$

- x(k) approssima α con *errore relativo* < E: ‘la procedura restituisce un’approssimazione accurata *quanto richiesto dall’utilizzatore*’

- è *inutile* scegliere E < β^{1-m}