Lezione 03 (ore 03,04) - 25 settembre 2025, 8:30 - 10:30 F3

(1.08) Realizzazione *Scilab*.

```
function [z, v, info, k, mis] = bisezione(f, a, b, E, kmax)
//
// Uso:
//     [ z,v,info,[k,[mis]] ] = bisezione(f,a,b,E,kmax)
//
//
// Approssima uno zero della funzione f:[a,b] -> R, che deve
// essere continua, con il metodo di bisezione. La funzione f
// deve assumere valori non nulli e di segno opposto in a e b.
//
// L'iterazione si arresta quando:
// (*) la funzione f ha valore zero nel punto medio x_m
//     dell'intervallo considerato [a(k),b(k)];
// (*) l'intervallo considerato [a(k),b(k)] ha misura minore di
//     E: in tal caso si ha, in teoria, che z approssima uno zero di
//     f con errore assoluto non superiore ad E/2;
// (*) dopo kmax iterazioni.
//
// kmax: valore opzionale (valore predefinito: 50).
//
// z: approssimazione finale (zero di f oppure punto medio
//    dell'ultimo intervallo generato);
// v: valore di f in z;
// info = 0: individuato valore in cui f si annulla (f(z) = 0);
//      = 1: f(z) ~= 0 e l'ultimo intervallo considerato ha misura
//           minore di E (mis < E);
//      = 2: f(z) ~= 0, mis >= E e il numero di iterazioni ha
//           raggiunto il massimo consentito (k = kmax);
// k: numero di iterazioni effettuate;
// mis: ampiezza dell'ultimo intervallo determinato.
//
//
// Inizializzazioni
//
if ~exists('kmax','l') then kmax = 50; end;
k_bis = 0; // contatore delle iterazioni eseguite
//
// Costruzione successioni
//
x_m = (a + b)/2;
f_m = f(x_m);
while (abs(b-a) >= E & f_m ~= 0 & k_bis < kmax),
  k_bis = k_bis+1;
  if sign(f_m) == sign(f(b)) then b = x_m; else a = x_m; end;
  x_m = (a + b)/2;
```

```
  f_m = f(x_m);
end;
//
// Fine costruzione: assegno variabili di uscita
//
z = x_m; v = f_m; k = k_bis; mis = abs(b-a);
if f_m == 0 then info = 0;
   else if abs(b-a) >= E then info = 2; else info = 1; end;
end;
//
endfunction
```

(1.09) Osservazione.

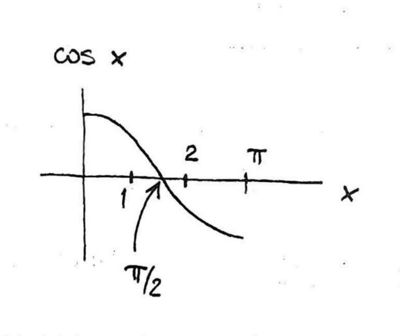
Il *costrutto Scilab*

```
while condizione,
  istruzioni;
end;
```

è equivalente a:

> ripeti:
>   se condizione è vera allora istruzioni;
>   altrimenti esci dal ciclo;

(1.10) Esempio



Sia f(x) = cos(x).

- La funzione è continua in [a,b] = [1,2] e f(a) > 0, f(b) < 0
- Scelto E > 0 si ha:

  $$\text{mis } I(k) < E \iff \text{mis } I(0) / 2^k < E \iff$$

  $$\iff 2^k > \text{mis } I(0) / E \iff k > \log_2(\text{ mis } I(0) / E \text{ })$$

  dunque: ci aspettiamo di ottenere un'approssimazione di pi/2 con errore assoluto minore di E in

  $$VA = \text{parte intera superiore di } \log_2(\text{ mis } I(0) / E \text{ })$$

  iterazioni.
- Si ottiene (utilizzando il file EsempioBisezione.sce scaricabile dalla sezione 'altro materiale didattico' della pagina web del corso):

E	info	mis	k	VA	kmax
10^{-5}	1	7.6 10^{-6}	17	17	50
10^{-10}	1	5.8 10^{-11}	34	34	50
10^{-15}	1	8.8 10^{-16}	50	50	50
10^{-16}	2	2.2 10^{-16}	60	54	60
10^{-16}	2	2.2 10^{-16}	100	54	100

Dalle ultime due righe della tabella si osserva che quando E = 10^{-16} la funzione *bisezione* si arresta perché ha raggiunto il numero massimo di iterazioni consentito ma, mentre nel primo caso (penultima riga) questo *è coerente* con le teoria, nel secondo caso (ultima riga) *non è coerente* con la teoria: la procedura *avrebbe dovuto arrestarsi dopo* 54 *iterazioni con* info = 1.

Per capire come mai accade questo, occorre studiare in maggior dettaglio l'ARITMETICA DEL CALCOLATORE.

(1.11) Domande.

(A) Con *quali numeri* è capace di operare il calcolatore?
(B) *Cosa sa fare* con questi numeri?

(1.12) Osservazione.

Siano x un numero reale *non zero*, β un numero intero maggiore o uguale a due (*base*). Esiste *una sola* fattorizzazione di x nella forma:

$$x = (-1)^s \beta^b g$$

con:
- s in {0,1}, *segno* di x
- b: numero intero, *esponente* di x in base β
- g: numero reale in $[1/\beta,1)$, *frazione* di x in base β

(Dimostrazione:
- se x > 0 allora s = 0, se x < 0 allora s = 1;
- b è l'*unico* numero intero tale che

$$\beta^{b-1} < |x| \leq \beta^b$$

- $g = |x| / \beta^b$)

(1.13) Esempio.

(1) x = sqrt(5), $\beta = 10 \Rightarrow$ s = 0, b = 1, g = sqrt(5) / 10
(2) x = sqrt(5), $\beta = 2 \Rightarrow$ s = 0, b = 2, g = sqrt(5) / 4

(1.14) Osservazione.

La condizione g numero reale in $[1/\beta,1)$ si traduce così: la scrittura posizionale di g in base β ha la forma:

$0.c_1c_2c_3...$ con c_1 *diverso da zero*

In particolare: *se* $\beta = 2$ *si ha necessariamente* $c_1 = 1$.

(1.15) Esempio.

(1) $x = 1/10$, $\beta = 10 \Rightarrow s = 0$, $b = 0$, $g = 1/10 = 0.1$

(2) $x = 1/10$, $\beta = 2 \Rightarrow s = 0$, $b = -3$, $g = 8/10 = 4/5 = 0.\overline{1100}$

(Ragionamento[1]:

(1)

* $4/5 = 0.c_1c_2c_3... \Rightarrow 8/5 = c_1.c_2c_3...$ e quindi:
* $[8/5] = [c_1.c_2c_3...]$ e $\{8/5\} = \{c_1.c_2c_3...\}$ ovvero:
* $c_1 = 1$ e $3/5 = 0.c_2c_3c_4...$

(2)

* $3/5 = 0.c_2c_3c_4... \Rightarrow 6/5 = c_2.c_3c_4...$ e quindi:
* $[6/5] = [c_2.c_3c_4...]$ e $\{6/5\} = \{c_2.c_3c_4...\}$ ovvero:
* $c_2 = 1$ e $1/5 = 0.c_3c_4c_5...$

(3)

* $1/5 = 0.c_3c_4c_5... \Rightarrow 2/5 = c_3.c_4c_5...$ e quindi:
* $[2/5] = [c_3.c_4c_5...]$ e $\{2/5\} = \{c_3.c_4c_5...\}$ ovvero:
* $c_3 = 0$ e $2/5 = 0.c_4c_5c_6...$

(4)

* $2/5 = 0.c_4c_5c_6... \Rightarrow 4/5 = c_4.c_5c_6...$ e quindi:
* $[4/5] = [c_4.c_5c_6...]$ e $\{4/5\} = \{c_4.c_5c_6...\}$ ovvero:
* $c_4 = 0$ e $4/5 = 0.c_5c_6c_7...$

Si osserva adesso che si è ottenuta una nuova scrittura del numero iniziale 4/5. Se ne deduce che 4/5 ha scrittura periodica di periodo quattro.

Fine del ragionamento.)

Si osservi che in entrambi gli esempi si ha $x = 1/10$ ma nell'esempio (1) la frazione ha scrittura posizionale di *lunghezza finita*, nell'esempio (2) ha *lunghezza infinita*. La lunghezza della scrittura posizionale dipende dalla base.

---

1 Se q è un numero reale, con [q] si indica la *parte intera* di q e con {q} la *parte frazionaria* di q, ovvero $\{q\} = q - [q]$.