Lezione 02 (ore 01,02) - 24 settembre 2025, 11:30 - 13:30 A13

(1) ZERI DI FUNZIONI E ARITMETICA DEL CALCOLATORE

(1.01) Problema.

Data f:[a,b] → R continua e tale che esiste t in R t.c. f(t) = 0, determinare t. Il numero t si chiama 'zero di f'.

(1.02) Teorema (di esistenza degli zeri)

Sia f:[a,b] → R continua e t.c. f(a)f(b) < 0. Allora: esiste t in (a,b) t.c. f(t) = 0.

(1.03) Osservazione.

La condizione f(a)f(b) < 0 è equivalente alla condizione:

f(a) *non è zero* & f(b) *non è zero* & segno f(a) *diverso da* segno f(b)

(1.04) Metodo di bisezione.

Idea: utilizzare il Teorema di esistenza degli zeri per ottenere una successione di intervalli I(k) = [a(k),b(k)] tale che:

- per ogni k, esiste zero di f in I(k)
- I(k+1) incluso in I(k)
- quando k → ∞ si ha mis I(k) → 0

(1.05) Descrizione del metodo.

z = *Bisezione*(f,a,b)

ingresso: f:(a,b) → R t.c. f(a)f(b) < 0

- a(0) = a; b(0) = b; I(0) = [a(0),b(0)]; x(0) = (a(0) + b(0)) / 2;
- per k = 1,2,3,… ripeti:
  - se f(x(k-1)) = 0 allora STOP; altrimenti
    - se f(x(k-1))f(b(k-1)) < 0 allora a(k) = x(k-1); b(k) = b(k-1);
      altrimenti a(k) = a(k-1); b(k) = x(k-1);
    - I(k) = [a(k),b(k)]; x(k) = (a(k) + b(k)) / 2;

uscita: quando un opportuno *criterio d'arresto* è verificato: z = x(k), punto medio dell'ultimo intervallo determinato.

(1.06) Osservazione.

(A) mis I(k) = b(k) - a(k) = mis I(k-1) / 2^1 = mis I(k-2) / 2^2 = ... = mis I(0) / 2^k e quindi:

quando $k \to \infty$ si ha mis $I(k) \to 0$

(B) se f continua allora: per ogni k, I(k) contiene uno zero di f e

quando $k \to \infty$ si ha $x(k) \to t$ con $f(t) = 0$

(Dimostrazione ...)

(1.07) Criterio d'arresto.

Il metodo di bisezione è un *metodo iterativo*, ovvero un metodo che approssima l'oggetto cercato costruendo una *successione*. Poiché è materialmente impossibile costruire *tutti* gli elementi della successione, è *necessario* introdurre un criterio d'arresto, ovvero una condizione che, quando verificata, arresta la costruzione delle successione.

Un esempio di criterio d'arresto è: dato Δ numero reale *positivo* ...

se mis $I(k) < \Delta$ allora STOP

Proprietà del criterio d'arresto:

(1) la *condizione* mis $I(k) < \Delta$ '*è calcolabile*'
(2) la condizione è *certamente verificata* dopo un numero *finito* di iterazioni (vedi l'Osservazione (B) in (1.06)): il criterio '*è efficace*'
(3) se f continua e k è tale che mis $I(k) < \Delta$ allora:

- esiste t in I(k) zero di f
- $|x(k) - t| <$ mis $I(k) / 2 < \Delta/2 < \Delta$

ovvero la procedura restituisce un valore x(k) che è un'approssimazione di uno zero di f con *errore assoluto* $|x(k) - t|$ minore di Δ: 'la procedura restituisce un'approssimazione *accurata quanto richiesto dall'utilizzatore*'.