Lezione 34

Quest'ultima lezione è dedicata allo svolgimento di esercizi.

- *Esercizi.*

  (1) Sia:

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  Determinare la *terza* colonna di U^{-1}.
  Soluzione.
  La matrice U è triangolare superiore. Si constata facilmente che è *invertibile*, dunque la richiesta è sensata. Per definizione, dette $x_1, \ldots, x_4$ le colonne della matrice U^{-1} si ha:

$$U(x_1, \ldots, x_4) = I$$

  ovvero, leggendo l'uguaglianza *per colonne* e dette $e_1, \ldots, e_4$ le colonne della matrice identità I:

$$Ux_1 = e_1 \quad , \quad \ldots \quad , \quad Ux_4 = e_4$$

  La terza colonna di U^{-1} è dunque *la soluzione del sistema* $Ux = e_3$. Utilizzando la procedura SI si ottiene:

$$x_3 = \begin{bmatrix} 1/24 \\ -1/12 \\ 1/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  (2) Definire una procedura *Scilab* di intestazione:

```
function X = InvTrSup(T)
```

  che, data $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ triangolare superiore invertibile, utilizza la procedura `SI` e restituisce una matrice `X` $\in \mathbb{R}^{n \times n}$ che approssima T^{-1}. Determinare poi il *costo* della procedura `InvTrSup`.
  Soluzione.
  Tenuto conto di quanto ricordato nella Soluzione dell'Esercizio precedente, una possibile definizione è la seguente:

```
function X = InvTrSup(T)
//
//  Per T matrice n x n triangolare superiore invertibile
//  restituisce X matrice n x n che approssima la matrice
//  inversa di T.
//
  n = size(T,'c');
  Id = eye(n,n);
  for k = 1:n,
      X(:,k) = SI(T,Id(:,k));
  end;
endfunction
```

  Il costo di `InvTrSup` è $n \cdot C(\texttt{SI})$, ovvero:

$$C(\texttt{InvTrSup}) = n^3$$

(3) Siano:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Determinare EGPP(A), risolvere il sistema $Ax = b$ e calcolare $c_1(A)$.

Soluzione.

Si ottiene EGPP$(A) = [S, D, P]$ con:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 3/5 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -5/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 0 & -3/5 \end{bmatrix} \quad , \quad P = P_{34} P_{23} P_{12}$$

Si constata facilmente che la matrice D, e quindi A, è invertibile. La soluzione x^* del sistema $Ax = b$ si ottiene risolvendo prima il sistema $Sx = Pb$ con la procedura SA:

$$c = \mathrm{SA}(S, Pb) = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 5/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e poi il sistema $Dx = c$ con la procedura SI:

$$x^* = \mathrm{SI}(D, c) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Infine, si ha: $\| A \|_1 = 8$ e:

$$\| A^{-1} \|_1 = \| D^{-1} S^{-1} P \|_1 = \| D^{-1} S^{-1} \|_1$$

Utilizzando le procedure SA ed SI si determinano:

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1 & 0 \\ -1/5 & 1/5 & -3/5 & 1 \end{bmatrix}$$

e:

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1 & 10/3 \\ 0 & 1/4 & 0 & 5/3 \\ 0 & 0 & -2/5 & -7/3 \\ 0 & 0 & 0 & -5/3 \end{bmatrix}$$

da cui:

$$D^{-1} S^{-1} = \begin{bmatrix} -2/3 & 2/3 & -1 & 10/3 \\ -1/3 & 7/12 & -1 & 5/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1 & -7/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1 & -5/3 \end{bmatrix}$$

Si ottiene infine: $\| D^{-1} S^{-1} \|_1 = 9$ e $c_1(A) = 72$.

(4) Sia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da:

$$h(x) = \frac{1}{2} x^2$$

- $*$ Determinare il numero di punti uniti di h e separarli.
- $*$ Per ciascuno dei punti uniti, decidere se il metodo definito da h sia utilizzabile per l'approssimazione.

* In caso affermativo, determinare un punto iniziale x_0 a partire dal quale la successione generata dal metodo definito da h ed operando in $\mathbb{R}$ è convergente al punto unito in esame.

Soluzione.
Si determina immediatamente per via grafica che: (a) h ha *due* punti uniti: $\alpha_1 \in [-1, 1]$ e $\alpha_2 \in [1, 3]$ e (b) $h'(\alpha_1) = 0$ e $h'(\alpha_2) > 1$: il metodo è *utilizzabile* per approssimare α_1 e *non utilizzabile* per approssimare α_2.
Si considera dunque l'approssimazione di α_1. Per determinare x_0 si constata che $|\, h'(x)\, | < 1$ per $x \in (-1, 1)$, dunque per ogni $a \in (0, 1)$ l'intervallo $[-a, a]$ verifica le ipotesi (1) e (2) del Teorema di convergenza. Dal criterio di scelta del punto iniziale si deduce che a partire da *ogni* $x_0 \in [-a, a]$, e quindi da *ogni* $x_0 \in (-1, 1)$ il metodo genera una successione convergente ad α_1. Inoltre: (i) L'ordine di convergenza del metodo ad α_1 è *almeno due*; (ii) Essendo $h'(x) > 0$ per $x \in (0, 1)$, se $x_0 \in (0, 1)$ allora la successione è *monotona decrescente* e (iii) Essendo $h'(x) < 0$ per $x \in (-1, 0)$, se $x_0 \in (-1, 0)$ allora $x_1 \in (0, 1)$ e la successione è poi di nuovo *monotona decrescente*.

(5) Sia γ un numero reale positivo e si consideri la successione definita da:

$$x_0 = \gamma \qquad , \qquad x_k = \tfrac{1}{2}\left(x_{k-1} + \frac{2}{x_{k-1}}\right) \quad , \quad k = 1, 2, \ldots$$

* Determinare gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che:
$$\lim_{k\to\infty} x_k = \alpha$$
* Posto $\gamma = 1$ decidere se la successione che si ottiene è convergente ed eventualmente discutere la rapidità di convergenza.

Soluzione.
Sia h la funzione definita, per $x > 0$, da:

$$h(x) = \tfrac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

Per ogni $x > 0$ si ha $h(x) > 0$: La successione considerata è quella generata dal metodo ad un punto definito da h a partire da γ. La funzione h è *continua*, dunque:

Se la successione generata è convergente ad α, allora α è punto unito *di h*

Si ha:
$$\alpha = h(\alpha) \quad \text{se e solo se} \quad \alpha^2 = 2$$
Esiste *un solo* possibile valore del limite: $\alpha = \sqrt{2}$.
Poiché:
$$h'(x) = \tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{x^2}\right)$$
allora:

$$0 < x < \sqrt{2} \;\Rightarrow\; h'(x) < 0 \quad , \quad h'(\sqrt{2}) = 0 \quad \text{e} \quad x > \sqrt{2} \;\Rightarrow\; 0 < h'(x) < \tfrac{1}{2}$$

Si deduce che: (i) Se $\gamma > \sqrt{2}$ allora la successione è *convergente* a $\sqrt{2}$ e monotona decrescente, infatti: l'intervallo $[\sqrt{2}, \gamma]$ verifica le ipotesi (1) e (2) del Teorema di convergenza e $h'(x) > 0$ per ogni $x \in (\sqrt{2}, \gamma)$; (ii) Se $\gamma \in (0, \sqrt{2})$, in particolare se $\gamma = 1$, allora la successione è *convergente* a $\sqrt{2}$ e, per $k \geqslant 1$, monotona decrescente, infatti: $h'(x) < 0$ per ogni $x \in (\gamma, \sqrt{2})$ e quindi $x_1 > \sqrt{2}$; per $k \geqslant 1$ vale poi quanto dimostrato al punto (i) e, infine, (iii) essendo $h'(\sqrt{2}) = 0$, il metodo definito da h ha *ordine di convergenza almeno due.*

(6) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da:

$$f(x) = e^{x^2} - 4x^2$$

* Determinare il numero di zeri di f e separarli.

* Per ciascuno degli zeri, decidere se il metodo di bisezione sia utilizzabile per l'approssimazione.
* In caso affermativo, determinare il valore *minimo* che l'utilizzatore può ragionevolmente assegnare al parametro `delta` per il *criterio di arresto assoluto* operando in $F(2, 53)$.

Soluzione.
Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da:

$$g(y) = e^y - 4y$$

Allora $f(x) = g(x^2)$. Si ha inoltre:

* Per ogni $y \in \mathbb{R}$: $g''(y) = e^y > 0$, dunque g ha al più *due* zeri.
* $g(0) > 0$, $g(1) < 0$ e $g(4) > 0$, dunque g ha *due* zeri: $y_1 \in (0, 1)$ e $y_2 \in (1, 4)$

Ne segue che f ha *quattro* zeri: $\alpha_1 \in [0, 1], \alpha_2 \in [1, 4]$, $\alpha_3 = -\alpha_1$ e $\alpha_4 = -\alpha_2$.
La funzione f è continua ed assume valori di segno opposto agli estremi di ciascuno degli intervalli che separano gli zeri. Ciascuno zero può quindi essere approssimato utilizzando il metodo di bisezione a partire dal corrispondente intervallo che lo separa. Si osservi anche che, dati $0 \leqslant a < b$, poiché la funzione f è *pari*, la successione generata a partire dall'intervallo $[-b, -a]$ è l'opposta della successione generata a partire da $[a, b]$.
Il valore *minimo* che l'utilizzatore può ragionevolmente assegnare a `delta` operando in $F(2, 53)$ è l'ampiezza del *più grande* intervallo ad estremi elementi consecutivi di $F(2, 53)$ contenuto nell'intervallo iniziale, ovvero: 2^{-53} per gli intervalli $[0, 1]$ e $[-1, 0]$, e $2^{2-53} = 2^{-51}$ per gli intervalli $[1, 4]$ e $[-4, -1]$.

(7) Siano $[a, b]$ un intervallo non degenere, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione con *derivata terza continua* e p *il* polinomio che interpola i campioni di f in:

$$a \quad , \quad \frac{a+b}{2} \quad , \quad b$$

Detto M_3 il massimo di $|\, f^{(3)}(x) \,|$ su $[a, b]$, come noto per ogni $x \in [a, b]$ si ha:

$$|\, f(x) - p(x) \,| \leqslant \frac{M_3}{3!} \,|\, x - a \,| \left|\, x - \frac{a+b}{2} \,\right| |\, x - b \,|$$

Dimostrare che, allora:

$$\max_{x \in [a,b]} |\, f(x) - p(x) \,| \leqslant \frac{M_3}{3!} \left(\frac{b-a}{2} \right)^3$$

Soluzione.
Si ha:

$$\max_{x \in [a,b]} |\, x - a \,| \left|\, x - \frac{a+b}{2} \,\right| |\, x - b \,| \leqslant \max_{x \in [a,b]} |\, x - a \,| \,|\, x - b \,| \max_{x \in [a,b]} \left|\, x - \frac{a+b}{2} \,\right|$$

Inoltre:

$$\max_{x \in [a,b]} |\, x - a \,| \,|\, x - b \,| = \left(\frac{b-a}{2} \right)^2 \quad \text{e} \quad \max_{x \in [a,b]} \left|\, x - \frac{a+b}{2} \,\right| = \frac{b-a}{2}$$

da cui segue l'asserto.

(8) Si considerino i seguenti assegnamenti in *Scilab*:

```
-->A = [1,2,4;1,2,4;1,2,4];

-->B = A ./ A;

-->C = 1 ./ A;
```

Determinare il valore di `B` e `C`.

Soluzione.

Si osservi che $1, 2$ e 4 sono elementi di $F(2, 53)$ e quindi:

$$\mathtt{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Si ricordi poi che (vedi l'Esercitazione 2) se `M` e `N` sono matrici di uguale dimensione ad elementi $\mathtt{m}_{ij}$ e, rispettivamente, $\mathtt{n}_{ij}$ in $F(2, 53)$, non nulli quelli di `N`, allora `M ./ N` è la matrice della stessa dimensione di `M` ed `N` di elemento i, j dato da $\mathtt{m}_{ij}$ / $\mathtt{n}_{ij}$. Allora:

$$\mathtt{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e, tenuto conto che $1/2$ e $1/4$ sono elementi di $F(2, 53)$:

$$\mathtt{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 1 & 1/2 & 1/4 \\ 1 & 1/2 & 1/4 \end{bmatrix}$$

(9) Si consideri la seguente definizione:

```
function y = g(k)
//
// k: numero intero positivo.
//
  y = 0;
  if k <= 0 then error('argomento non positivo');
     else for j = 1:k,
                y($+1,1) = j;
          end;
  end;
endfunction
```

Determinare il valore di `x` dopo l'assegnamento:

```
x = g(4)
```

Soluzione.

La funzione `g` costruisce, se k è un numero intero positivo, la *colonna* di componenti i numeri interi da 0 a k. Dunque dopo l'assegnamento, tenuto conto che tutti gli interi da 1 a 4 sono elementi di $F(2, 53)$, si ha:

$$\mathtt{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(10) Sia N un numero intero positivo. Per approssimare il grafico della funzione:

$$f(x) = 2x + \cos x$$

sull'intervallo $[0, 2]$ si utilizzano le istruzioni seguenti:

```
-->x = linspace(0,2,N)';

-->y = 2 * x + cos(x);

-->plot2d(x,y);
```

Descrivere il valore della variabile `x` dopo il primo assegnamento e poi determinare N in modo che la curva tracciata da *Scilab* approssimi il grafico di f con errore non superiore a 10^{-2}.

Soluzione.

Dati numeri reali a, b ed un numero intero $n \geqslant 2$, l'istruzione:

$$\texttt{linspace(}a\texttt{,}b\texttt{,}n\texttt{)}$$

restituisce *una riga* di n numeri di macchina che *approssimano* i valori:

$$a + \frac{b-a}{n-1}\,(j-1) \quad , \quad j = 1, \ldots, n$$

dunque dopo il primo assegnamento il valore di `x` è la *colonna* ottenuta come trasposta di una riga di N numeri di macchina che approssimano i valori:

$$\frac{2}{N-1}\,(j-1) \quad , \quad j = 1, \ldots, N$$

L'istruzione `plot2d(x,y)` genera nella finestra grafica corrente il disegno della spezzata di vertici i punti di coordinate $(\mathtt{x}_j, \mathtt{y}_j), j = 1, \ldots, N$. Quest'ultima è una ragionevolmente buona approssimazione del grafico della funzione σ continua e lineare a tratti sull'unione τ degli intervalli definiti dagli istanti di campionamento $\mathtt{x}_j, j = 1, \ldots, N$, che interpola i campioni di f. La teoria relativa alla ricostruzione con funzioni continue e lineari a tratti assicura che:

$$\max_{x \in [0,2]} |\, \sigma(x) - f(x)\,| \leqslant \frac{M_2}{8}\, h(\tau)^2$$

Si ha:

$$M_2 = \max_{x \in [0,2]} |\, f''(x)\,| = 1$$

e:

$$h(\tau) \approx \frac{2}{N}$$

Allora, scelto N tale che:

$$\frac{1}{2N^2} < 10^{-2} \qquad (*)$$

si ha:

$$\max_{x \in [0,2]} |\, \sigma(x) - f(x)\,| \leqslant \frac{1}{8}\left(\frac{2}{N}\right)^2 = \frac{1}{2N^2} < 10^{-2}$$

Il più piccolo valore di N che rende vera la relazione $(*)$ è $N = 8$.

(11) Sia $y =$ `number_properties('tiny')`. Determinare:

$$z = \texttt{nearfloat('succ',}y\texttt{)} \quad \text{e} \quad x = \texttt{nearfloat('pred',}y\texttt{)}$$

Soluzione.

L'insieme dei numeri di macchina di *Scilab* è $F(\beta, m, b_{min}, b_{max})$ con: $\beta = 2, m = 53, b_{min} = -1021, b_{max} = 1024$. Il valore restituito da `number_properties('tiny')` è il più piccolo numero di macchina positivo *normalizzato*: $y = 2^{-1021} \cdot 0.10\cdots0 = 2^{-1022}$. Il valore restituito da `nearfloat('succ',`y`)` è il *successore* di y:

$$z = \sigma(y) = 2^{-1021} \cdot 0.10\cdots01$$

Quello restituito da `nearfloat('pred',`y`)` è il *predecessore* di y, ovvero il più grande numero di macchina *denormalizzato*:

$$x = \pi(y) = 2^{-1021} \cdot 0.01\cdots1$$

(12) Definire una funzione *Scilab* di intestazione:

```
function y = Succ(v,j)
```

che, dati un numero reale v ed un numero intero positivo j, restituisce un'approssimazione della *colonna* di elementi i primi j termini della successione definita da:

$$x_0 = v \quad , \quad x_k = 3x_{k-1} + 7 \quad , \quad k = 1, 2, \ldots$$

Infine, detta rd la funzione arrotondamento in $F(2, 53)$, indicare il valore delle componenti di `y` dopo l'assegnamento:

`y = Succ(`v`,2)`

in termini di v.

Soluzione.

Una possibile definizione è:

```
function y = Succ(v,j)
//
// v: numero reale
// j: numero intero positivo
//
  y = v;
  for i = 1:j-1,
      y(i+1) = 3*y(i) + 7;
  end;
endfunction
```

Si ha infine:

$$\mathtt{y} = \begin{bmatrix} \mathrm{rd}(v) \\ \mathrm{rd}\Big(\mathrm{rd}\big(3\,\mathrm{rd}(v)\big) + 7\Big) \end{bmatrix}$$

Esercizi

---

1. Si consideri la funzione f definita nell'Esercizio 6. Siano poi `F` l'algoritmo scelto per approssimare i valori di f e `Bisezione` la realizzazione iniziale del metodo di bisezione definita nell'Esercitazione 3. Eseguire gli assegnamenti:

   `z1 = Bisezione(F,0,1,2^(-50))` , `z2 = Bisezione(F,1,4,2^(-50))`

   e:

   `[f1,e1] = frexp(z1)` , `[f2,e2] = frexp(z2)`

   Eseguire poi gli assegnamenti:

   `z1 = Bisezione(F,0,1,delta)` e `z2 = Bisezione(F,1,4,delta)`

   assegnando a `delta` i valori: $2^{-51}, 2^{-52}, 2^{-53}$ e 2^{-54}. Discutere i risultati.

2. Verificare la soluzione dell'Esercizio 11 utilizzando la funzione `MostraFraz` definita nell'Esercizio 3 dell'Esercitazione 2.