Lezione 30

In questa lezione si studia il problema del *campionamento e ricostruzione* nel caso di *ricostruzione mediante interpolazione con funzioni continue lineari a tratti.*

- *Definizione* (funzione lineare a tratti).

  Siano $I = [a, b]$ un intervallo non degenere, $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ istanti di campionamento e, per $j = 1, \ldots, k$, $I_j = (t_{j-1}, t_j)$. Indichiamo con τ l'insieme aperto unione dei k intervalli $I_1, \ldots, I_k$.

  Una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è *lineare a tratti su* τ se per ogni $j = 1, \ldots, k$ esiste $p_j \in P_1(\mathbb{R})$ tale che $f = p_j$ su I_j. Il termine "lineare a tratti" fa riferimento al grafico di f su τ che, appunto, è unione di segmenti.

- *Osservazione* (lo spazio $S(\tau)$).

  Siano $I, t_0, \ldots, t_k$ e τ come nella Definizione precedente. Detto $S(\tau)$ l'insieme di *tutte* le funzioni $f : I \to \mathbb{R}$ *continue* e *lineari a tratti su* τ si ha:

  (a) *$S(\tau)$ è un sottospazio vettoriale dello spazio $C(I)$ delle funzioni continue su I.*
  Infatti: si verifica facilmente che se $f, g \in S(\tau)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ allora $f + g \in S(\tau)$ e $\alpha f \in S(\tau)$.

  (b) *Assegnati numeri reali $y_0, \ldots, y_k$ esiste un solo elemento di $S(\tau)$ che interpola i dati $(t_0, y_0), \ldots, (t_k, y_k)$.*
  Infatti: Per $j = 1, \ldots, k$ sia p_j l'unico elemento di $P_1(\mathbb{R})$ che interpola i dati (t_{j-1}, y_{j-1}), (t_j, y_j) e sia poi f la funzione continua tale che $f = p_1$ su $I_1, \ldots, f = p_k$ su I_k. Allora $f \in S(\tau)$ e $f(t_0) = y_0, \ldots, f(t_k) = y_k$. Sia inoltre g un altro elemento di $S(\tau)$ che interpola gli stessi dati. Allora $f - g \in S(\tau)$. Se fosse $f(t) - g(t) \neq 0$ per $t \in I_j$, detto q_j l'elemento di $P_1(\mathbb{R})$ che coincide con $f - g$ su I_j, si avrebbe: (a) $q_j(t) \neq 0$ e quindi $q_j \neq 0$, e (b) q_j è l'unico elemento di $P_1(\mathbb{R})$ che interpola i dati $(t_{j-1}, 0), (t_j, 0)$, ovvero $q_j = 0$: assurdo.

  (c) *$S(\tau)$ ha dimensione $k + 1$.*
  Infatti: Per $i = 0, \ldots, k$, sia s_i l'elemento di $S(\tau)$ che vale *uno* in t_i e *zero* in tutti gli altri istanti di campionamento. Questi elementi sono univocamente determinati per quanto mostrato nel punto (b). Allora si ha:

  * Se $a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ sono coefficienti tali che $\phi = a_0 s_0 + \cdots + a_k s_k = 0$, allora $0 = \phi(t_0) = a_0, \ldots, 0 = \phi(t_k) = a_k$: gli elementi $s_0, \ldots, s_k$ sono *linearmente indipendenti.*
  * Sia $\sigma \in S(\tau)$. Si verifica che l'elemento $\sigma(t_0)\, s_0 + \cdots + \sigma(t_k)\, s_k \in S(\tau)$ interpola i dati $(t_0, \sigma(t_0)), \ldots, (t_k, \sigma(t_k))$. Ma anche σ interpola gli stessi dati. Per l'unicità stabilita nel punto (b) si ha:

  $$\sigma = \sigma(t_0)\, s_0 + \cdots + \sigma(t_k)\, s_k$$

    ovvero σ è una combinazione lineare di $s_0, \ldots, s_k$: gli elementi $s_0, \ldots, s_k$ sono *generatori di $S(\tau)$.*

  Dunque: $s_0, \ldots, s_k$ sono una *base* di $S(\tau)$, che chiameremo *base canonica.*

  Quanto mostrato nei punti (a) e (c) – che $S(\tau)$ è un sottospazio vettoriale di $C(I)$ di dimensione finita – consente di asserire che il problema di cui tratta il punto (b) è un problema lineare di interpolazione.

- *Ricostruzione con funzioni continue lineari a tratti.*

  Siano $I, t_0, \ldots, t_k$ e τ come nella Definizione iniziale, c la funzione di campionamento agli istanti $t_0, \ldots, t_k$. Dette $y_0, \ldots, y_k$ le componenti di $y \in \mathbb{R}^{k+1}$, la funzione $\rho : \mathbb{R}^{k+1} \to C(I)$ definita da:

  $$\rho(y) = \text{l'elemento di } S(\tau) \text{ che interpola i dati } (t_0, y_0), \ldots, (t_k, y_k)$$

  è una funzione di ricostruzione relativa a c.

Infatti: Utilizzando la base canonica di $S(\tau)$ si ha:

$$\rho(y) = y_0 s_0 + \cdots + y_k s_k$$

Allora si constata facilmente che ρ *è lineare*; inoltre, per definizione, $\rho(y)$ interpola i dati $(t_0, y_0), \ldots, (t_k, y_k)$.

- *Teorema* (errore di ricostruzione con funzioni continue lineari a tratti).

  Siano $I, t_0, \ldots, t_k$ e τ come nella Definizione iniziale. *Se* $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione *con derivata seconda continua* e σ è l'elemento di $S(\tau)$ che interpola i campioni di f, ovvero i dati $(t_0, f(t_0)), \ldots, (t_k, f(t_k))$, posto $M_2 = \max_{x \in I} |\, f''(x) \,|$ e $h(\tau) = \max\{\, \operatorname{mis} I_1, \ldots, \operatorname{mis} I_k \,\}$, *allora* per l'errore di ricostruzione relativo ad f si ha:

$$e(f) = \max_{t \in I} |\, f(t) - \sigma(t) \,| \leqslant \frac{M_2}{8}\, h(\tau)^2$$

  Dimostrazione: Per ogni $j = 1, \ldots, k$ esiste $p_j \in P_1(\mathbb{R})$ tale che $\sigma = p_j$ su I_j. Allora, dal Teorema riguardante l'errore di ricostruzione con interpolazione polinomiale, per $j = 1, \ldots, k$ si ha:

$$\textit{Per ogni } t \in I_j \textit{ esiste } \theta_j \in I_j \textit{ tale che: } f(t) - \sigma(t) = f(t) - p_j(t) = \frac{f''(\theta_j)}{2}\,(t - t_{j-1})(t - t_j)$$

  Per ogni $t \in I_j$ si ha poi:

$$\left| \frac{f''(\theta_j)}{2}\,(t - t_{j-1})(t - t_j) \right| \leqslant \frac{M_2}{2} \max_{t \in I_j} |\, (t - t_{j-1})(t - t_j) \,|$$

  e:

$$\max_{t \in I_j} |\, (t - t_{j-1})(t - t_j) \,| = \left(\frac{t_j - t_{j-1}}{2} \right)^2 = \frac{(\operatorname{mis} I_j)^2}{4}$$

  ovvero, posto $\operatorname{mis} I_j = m_j$:

$$\left| \frac{f''(\theta_j)}{2}\,(t - t_{j-1})(t - t_j) \right| \leqslant \frac{M_2}{8}\, m_j^2$$

  Dunque:

$$\max_{t \in I_j} |\, f(t) - \sigma(t) \,| \leqslant \frac{M_2}{8}\, m_j^2$$

  Infine:

$$e(f) = \max_{t \in I} |\, f(t) - \sigma(t) \,| = \max_{j} \max_{t \in I_j} |\, f(t) - \sigma(t) \,| \leqslant \max_{j} \frac{M_2}{8}\, m_j^2 = \frac{M_2}{8}\, h(\tau)^2$$

- Una *strategia di scelta* degli istanti di campionamento è una *funzione* che ad ogni numero intero $k = 1, 2, \ldots$ associa un insieme di $k + 1$ istanti di campionamento. La strategia genera quindi una *successione* di insiemi τ_k. Il Teorema precedente mostra che per la ricostruzione con funzioni continue lineari a tratti si ha: *Se* f ha derivata seconda continua e la strategia di scelta degli istanti di campionamento è tale che:

$$\lim_{k \to \infty} h(\tau_k) = 0$$

  allora $\lim_{k \to \infty} e(f) = 0$.

- *Esempio.*

  * Sia $[a, b]$ un intervallo non degenere. Per la strategia di scelta degli istanti di campionamento definita da:

$$t_j = a + \frac{b - a}{k}\, j \qquad , \qquad j = 0, \ldots, k$$

    ovvero per il *campionamento uniforme*, si ha:

$$h(\tau_k) = \frac{b - a}{k}$$

    Dunque $\lim_{k \to \infty} h(\tau) = 0$, con la rapidità di $1/k^2$.

* Sia $[a,b]=[0,1]$. Per la strategia di scelta degli istanti di campionamento definita da:

$$t_j = \frac{j}{j+1} \quad \text{per } j=0,\dots,k-1 \quad \text{e} \quad t_k = 1$$

si ha:

$$h(\tau_1)=1 \quad \text{e, per } k>1\text{:} \quad h(\tau_k)=\tfrac{1}{2}$$

Dunque $\lim_{k\to\infty} h(\tau) \neq 0$.

- *Condizionamento del problema della ricostruzione con funzioni continue lineari a tratti.*

Siano I un intervallo chiuso e limitato non degenere, k un numero intero non negativo ed $r : \mathbb{R}^{k+1} \to C(I)$ una funzione di ricostruzione. Dato $y \in \mathbb{R}^{k+1}$ sia $\delta \in \mathbb{R}^{k+1}$ la *perturbazione* di componenti $\delta_0,\dots,\delta_k$ e si considerino le funzioni $r(y)$ e $r(y+\delta)$. Scelto di misurare la variazione della funzione ricostruita con:

$$\max_{t\in I} |\, r(y+\delta) - r(y) \,|$$

per la linearità della funzione di ricostruzione si ha:

$$\max_{t\in I} |\, r(y+\delta) - r(y) \,| = \max_{t\in I} |\, r(\delta) \,|$$

Nel caso di ricostruzione con funzioni continue lineari a tratti, posto $\tau = (t_0,t_1)\cup\cdots\cup(t_{k-1},t_k)$ ed utilizzando la base canonica di $S(\tau)$ si ottiene:

$$|\, r(\delta) \,| = |\, \delta_0 s_0(t) + \cdots + \delta_k s_k(t) \,| \leqslant |\, \delta_0 \,|\,|\, s_0(t) \,| + \cdots + |\, s_k \,|\,|\, \ell_k(t) \,|$$

Introdotta la misura della perturbazione $\|\, \delta \,\|_\infty$ si deduce:

$$|\, \delta_0 \,|\,|\, s_0(t) \,| + \cdots + |\, \delta_k \,|\,|\, s_k(t) \,| \leqslant \|\, \delta \,\|_\infty \big(|\, s_0(t) \,| + \cdots + |\, s_k(t) \,| \big)$$

Ma per ogni $t \in I$ e $j=0,\dots,k$ si ha: $s_j(t) \geqslant 0$, dunque:

$$|\, s_0(t) \,| + \cdots + |\, s_k(t) \,| = s_0(t) + \cdots + s_k(t)$$

e si constata inoltre che:

$$s_0(t) + \cdots + s_k(t) = 1$$

Allora:

$$\max_{t\in I} |\, r(y+\delta) - r(y) \,| \leqslant \|\, \delta \,\|_\infty \qquad (**)$$

Questa disuguaglianza mostra che *il condizionamento del problema della ricostruzione con funzioni continue lineari a tratti è sempre buono.*

Esercizi

---

1. Sia $I=[0,2]$, $\tau=(0,1)\cup(1,2)$ e $f : I \to \mathbb{R}$ la funzione continua e lineare a tratti definita da:

$$f(t) = \begin{cases} 1+t & \text{per } t\in(0,1) \\ 3-t & \text{per } t\in(1,2) \end{cases}$$

Determinare $f(0), f(1)$ e $f(2)$.

2. Sia $\tau = (0,\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},1)$. Determinare gli elementi $\sigma \in S(\tau)$ che verificano le condizioni:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sigma(x)\,dx = 0 \quad , \quad \sigma(0)=1 \quad , \quad \int_{\frac{1}{2}}^{1} \sigma(x)\,dx = -1$$

3. Siano $I = [0,4]$ e $\tau = (0,1) \cup (1,2) \cup (2,3) \cup (3,4)$. Detta $s_0, \ldots, s_4$ la base canonica di $S(\tau)$, disegnare il grafico di $\sigma = 4s_0 - s_1 + 2s_2 + s_3 - 2s_4$.

4. Dimostrare che *la disuguaglianza* $(**)$ *è la migliore possibile* nel senso che: *esiste* $\delta \in \mathbb{R}^{k+1}$ *tale che*:

$$\max_{t \in I} | \, r(y+\delta) - r(y) \, | = \| \, \delta \, \|_\infty$$

5. Siano $I = [0,1]$ e $f(t) = e^{-t}$. Scelto di utilizzare il campionamento uniforme e la ricostruzione con funzioni continue lineari a tratti, determinare il numero di istanti di campionamento in modo che $e(f) < 10^{-3}$. Confrontare la risposta con quella dell'Esercizio 3, Lezione 29. Discutere il risultato del confronto.