Lezione 29

In questa lezione si studia il problema del *campionamento e ricostruzione* nel caso di *ricostruzione mediante interpolazione polinomiale.*

- *Teorema* (errore di ricostruzione nell'interpolazione polinomiale).

  Siano k un numero intero non negativo, $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo non degenere, $t_0, \ldots, t_k$ istanti di campionamento *distinti* in I. *Se* $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione *con derivata* $(k+1)$*-esima continua* e p_k è il polinomio che interpola i campioni di f, ovvero i dati $(t_0, f(t_0)), \ldots, (t_k, f(t_k))$, *allora*:

  $$\textit{Per ogni } t \in I \textit{ esiste } \theta \in I \textit{ tale che:} \qquad f(t) - p_k(t) = \frac{f^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!}\,(t - t_0)\cdots(t - t_k)$$

  Se l'intervallo I è anche chiuso e limitato, posto $M_{k+1} = \max_{x \in I} |\, f^{(k+1)}(x)\,|$, *allora* per l'errore di ricostruzione relativo ad f si ha:

  $$e(f) = \max_{t \in I} |\, f(t) - p_k(t)\,| = \max_{t \in I} \frac{|\, f^{(k+1)}(\theta)\,|}{(k+1)!}\,|\, t - t_0\,|\cdots|\, t - t_k\,| \leqslant \frac{M_{k+1}}{(k+1)!}\,(\operatorname{mis} I)^{k+1}$$

  Dimostrazione: Omessa.[1] Si osservi che l'espressione della differenza $f(t) - p_k(t)$ ricorda quella della *forma di Lagrange del resto* per la formula di Taylor. Si osservi anche che θ *dipende da* t (vedere l'Esercizio 1).

- *Esempio.*

  (1) Siano $I = [0, 1]$ e $f(t) = e^{-t}$. La funzione f ha derivate di ordine comunque elevato e per ogni intero non negativo j si ha $M_j = 1$. Inoltre $\operatorname{mis} I = 1$, dunque dal Teorema precedente:

  $$e(f) \leqslant \frac{1}{(k+1)!}$$

  Si ha inoltre:

  $$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{(k+1)!} = 0$$

  e quindi $\lim_{k \to \infty} e(f) = 0$.

  (2) Siano $I = [0, 2\pi]$, ω un numero reale positivo e $f(t) = \operatorname{sen} \omega t$. La funzione f ha derivate di ordine comunque elevato e per ogni intero non negativo j si ha $M_j = \omega^j$. Inoltre $\operatorname{mis} I = 2\pi$, dunque dal Teorema precedente:

  $$e(f) \leqslant \frac{(2\pi\omega)^{k+1}}{(k+1)!}$$

  Anche in questo caso si ha (vedere l'Esercizio 2):

  $$\lim_{k \to \infty} \frac{(2\pi\omega)^{k+1}}{(k+1)!} = 0$$

  e quindi $\lim_{k \to \infty} e(f) = 0$.

  (3) Siano $I = [0, 1]$, f la funzione continua definita da:

  $$f(t) = \begin{cases} t \operatorname{sen} \frac{\pi}{t} & \text{per } t \neq 0 \\ 0 & \text{per } t = 0 \end{cases}$$

  e, per ogni numero intero k non negativo:

  $$t_j = \frac{1}{j+1} \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, k$$

[1] Vedere: M. Ciampa, "Calcolo Numerico, a.a. 2011/2012," Teorema 4.12, p.109-110. Il testo è reperibile sulla pagina web del corso.

la strategia di scelta degli istanti di campionamento. In questo caso il Teorema precedente non è utilizzabile, ma per ogni j si ha $f(t_j) = 0$ e quindi per ogni numero intero k non negativo l'elemento $p_k \in P_k(\mathbb{R})$ che interpola i campioni di f, ovvero i dati $(t_0, 0), \ldots, (t_k, 0)$, è il *polinomio nullo*. Dunque, posto $C = \max_{t\in I} \,|\, f(t) \,|> 0$, *per ogni* k si ha:

$$e(f) = \max_{t\in I} \,|\, f(t) - p_k(t) \,| = C$$

Per la funzione assegnata e la strategia di scelta degli istanti di campionamento utilizzata, non è possibile ridurre l'errore di ricostruzione aumentando k.

In generale, per la ricostruzione mediante interpolazione polinomiale si ha:

* *Se* f ha derivate di ordine comunque elevato e la successione M_k è tale che:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{M_{k+1}}{(k+1)!} \,(\operatorname{mis} I)^{k+1} = 0$$

  allora $\lim_{k\to\infty} e(f) = 0$. In questo caso: *l'errore di ricostruzione può essere reso arbitrariamente piccolo scegliendo sufficientemente grande il numero degli istanti di campionamento, con l'unico vincolo che siano distinti.*
* *Per ogni* funzione continua $f : I \to \mathbb{R}$, *esiste* una strategia di scelta degli istanti di campionamento tale che $\lim_{k\to\infty} e(f) = 0$;
* *Per ogni* strategia di scelta degli istanti di campionamento, *esiste* una funzione continua $f : I \to \mathbb{R}$ tale che $\lim_{k\to\infty} e(f) \neq 0$.

Si osservi che il secondo risultato, positivo, è poco utile perchè in pratica *non si conosce* la strategia di scelta giusta per gli istanti di campionamento.

- *Condizionamento del problema della ricostruzione mediante interpolazione polinomiale.*

Nel campionamento e ricostruzione di una funzione continua f, i campioni sono spesso ottenuti mediante un procedimento di *misura* dei valori di f agli istanti di campionamento $t_0, \ldots, t_k$. Per tenere conto dell'effetto sulla ricostruzione di inevitabili *errori* nel procedimento di acquisizione dei campioni, si studia il *condizionamento* del problema della ricostruzione, ovvero la grandezza della variazione della funzione ricostruita in termini della grandezza degli errori sui campioni.

Siano I un intervallo chiuso e limitato non degenere, k un numero intero non negativo ed $r : \mathbb{R}^{k+1} \to C(I)$ una funzione di ricostruzione. Dato $y \in \mathbb{R}^{k+1}$ sia $\delta \in \mathbb{R}^{k+1}$ la *perturbazione* di componenti $\delta_0, \ldots, \delta_k$ e si considerino le funzioni $r(y)$ e $r(y + \delta)$. Scelto di misurare la variazione della funzione ricostruita con:

$$\max_{t\in I} \,|\, r(y+\delta) - r(y) \,|$$

per la linearità della funzione di ricostruzione si ha:

$$\max_{t\in I} \,|\, r(y+\delta) - r(y) \,| = \max_{t\in I} \,|\, r(\delta) \,|$$

Nel caso di ricostruzione mediante interpolazione polinomiale, detti $\ell_0(t), \ldots, \ell_k(t)$ gli elementi della base di Lagrange di $P_k(\mathbb{R})$ relativi agli istanti $t_0, \ldots, t_k$, si ottiene:

$$|\, r(\delta) \,| = |\, \delta_0\, \ell_0(t) + \cdots + \delta_k\, \ell_k(t) \,| \leqslant |\, \delta_0 \,|\,|\, \ell_0(t) \,| + \cdots + |\, \delta_k \,|\,|\, \ell_k(t) \,|$$

Introdotta la misura della perturbazione $\|\, \delta \,\|_\infty$ si deduce:

$$|\, \delta_0 \,|\,|\, \ell_0(t) \,| + \cdots + |\, \delta_k \,|\,|\, \ell_k(t) \,| \leqslant \|\, \delta \,\|_\infty \big(\,|\, \ell_0(t) \,| + \cdots + |\, \ell_k(t) \,|\,\big)$$

da cui, posto:

$$\lambda(t_0, \ldots, t_k) = \max_{t\in I} \,\big(\,|\, \ell_0(t) \,| + \cdots + |\, \ell_k(t) \,|\,\big)$$

si ha:

$$\max_{t\in I} \,|\, r(y+\delta) - r(y) \,| \leqslant \lambda(t_0, \ldots, t_k)\, \|\, \delta \,\|_\infty \qquad (*)$$

Questa disuguaglianza mostra che *il condizionamento del problema della ricostruzione mediante interpolazione polinomiale dipende dal valore del coefficiente* $\lambda(t_0,\dots,t_k)$. Si ha: *per ogni criterio di scelta degli istanti di campionamento, al crescere di* k *il coefficiente* $\lambda(t_0,\dots,t_k)$ *aumenta almeno come* $\log k$. Dunque: *il condizionamento peggiora all'aumentare del numero degli istanti di campionamento.*

Ci si trova, in pratica, di fronte a due *esigenze contrastanti*: scegliere k *abbastanza elevato* da garantire un basso errore di ricostruzione e scegliere k *non troppo elevato* per non rendere troppo cattive le proprietà di condizionamento.

Si osservi, infine, che *la disuguaglianza* $(*)$ *è la migliore possibile* nel senso che: *esiste* $\delta \in \mathbb{R}^{k+1}$ *tale che*:

$$\max_{t\in I} |\, r(y+\delta) - r(y)\,| = \lambda(t_0,\dots,t_k)\,\|\,\delta\,\|_\infty$$

Infatti:

– Sia t^* tale che:

$$|\,\ell_0(t^*)\,| + \cdots + |\,\ell_k(t^*)\,| = \max_{t\in I}\big(\,|\,\ell_0(t)\,| + \cdots + |\,\ell_k(t)\,|\,\big) = \lambda(t_0,\dots,t_k)$$

– Scelto $\Delta > 0$, siano $\delta_0,\dots,\delta_k$ tali che:

$$|\,\delta_0\,| = \cdots = |\,\delta_k\,| = \Delta \quad \text{e, per } j=0,\dots,k\text{:} \quad \delta_j\,\ell_j(t^*) \geqslant 0$$

Allora, per ogni j, essendo $\delta_j\,\ell_j(t^*) \geqslant 0$ si ha: $\delta_j\,\ell_j(t^*) = |\,\delta_j\,\ell_j(t^*)\,| = \Delta\,|\,\ell_j(t^*)\,|$. Se ne deduce che:

$$\begin{aligned}|\,r(\delta)(t^*)\,| &= |\,\delta_0\,\ell_0(t^*) + \cdots + \delta_k\,\ell_k(t^*)\,| = \delta_0\,\ell_0(t^*) + \cdots + \delta_k\,\ell_k(t^*) = \\ &= |\,\delta_0\,\ell_0(t^*)\,| + \cdots + |\,\delta_k\,\ell_k(t^*)\,| = \Delta\big(\,|\,\ell_0(t^*)\,| + \cdots + |\,\ell_k(t^*)\,|\,\big) = \\ &= \|\,\delta\,\|_\infty\,\lambda(t_0,\dots,t_k)\end{aligned}$$

Esercizi

---

1. Si consideri il Teorema riguardante l'errore di ricostruzione nell'interpolazione polinomiale. Dimostrare che: *se* θ *non dipende da* t *allora* f *è un polinomio di grado al più* $k+1$.

2. Sia a un numero reale positivo e j la *parte intera superiore* di $2a$. Dimostrare che, posto:

$$N = \frac{a^j}{j!}$$

per ogni numero intero $k > j$ si ha:

$$\frac{a^k}{k!} = N\,\frac{a}{j+1}\cdots\frac{a}{k} < N\,(\tfrac{1}{2})^{k-j}$$

Ne segue:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a^k}{k!} = 0$$

3. Si considerino i dati dell'Esempio parte (1). Determinare k in modo che $e(f) < 10^{-3}$.

4. Sia $I = [a,b]$ un intervallo non degenere. Determinare $\lambda(a,b)$. Utilizzare poi *Scilab* per ottenere, graficamente, una stima di $\lambda(0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1)$.