Lezione 27

In questa lezione si enuncia e discute il *problema lineare dell'interpolazione.* Si introduce poi il problema del *campionamento e ricostruzione.*

(b) Problema lineare di interpolazione

- *Problema* (lineare di interpolazione).

  Siano:

  * $\mathcal{F}$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione *finita* d;
  * $L_0, \ldots, L_k$ applicazioni lineari da $\mathcal{F}$ in $\mathbb{R}$;
  * $y_0, \ldots, y_k$ numeri reali.

  Determinare gli elementi $f \in \mathcal{F}$ che verificano le condizioni:

$$L_0(f) = y_0, \ldots, L_k(f) = y_k$$

- *Esempio.*

  (1) Il problema di interpolazione polinomiale definito da $k, x_0, \ldots, x_k$ e $y_0, \ldots, y_k$ è il problema lineare di interpolazione definito da: $\mathcal{F} = P_k(\mathbb{R})$, $L_0(f) = f(x_0), \ldots, L_k(f) = f(x_k)$ e $y_0, \ldots, y_k$.

  Infatti: $P_k(\mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione finita e per ogni $a \in \mathbb{R}$ l'applicazione $L : P_k(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definita da $L(p) = p(a)$ è tale che:

$$p, q \in P_k(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad L(p+q) = (p+q)(a) = p(a) + q(a) = L(p) + L(q)$$

  e:

$$p \in P_k(\mathbb{R}), \alpha \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad L(\alpha\, p) = (\alpha\, p)(a) = \alpha\, p(a) = \alpha\, L(p)$$

  ovvero *è lineare.*

  (2) Il problema lineare di interpolazione definito da $\mathcal{F} = P_3(\mathbb{R})$, $L_0(p) = p(0)$, $L_1(p) = p(2)$ e $y_0 = 2, y_1 = -6$ *non è un problema di interpolazione polinomiale.*

  Infatti: Si cercano in $P_3(\mathbb{R})$, spazio vettoriale di dimensione *quattro*, elementi che verificano *solo due* condizioni di interpolazione. In particolare, al problema in esame *non si applica* il Teorema di esistenza ed unicità.

  (3) Il problema lineare di interpolazione definito da $\mathcal{F} = P_2(\mathbb{R})$, $L_0(p) = p(0)$,

$$L_1(p) = \int_0^1 p(\theta) d\theta$$

  $L_2(p) = p'(0)$ e $y_0 = 2, y_1 = -6, y_2 = 4$ *non è un problema di interpolazione polinomiale.*

  Infatti: Si cercano in $P_2(\mathbb{R})$, spazio vettoriale di dimensione tre, elementi che verificano tre condizioni *ma non tutte del tipo richiesto dal problema di interpolazione polinomiale.*

  Si osservi che assegnati numeri reali a, b tali che $a < b$, l'applicazione $L : P_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definita da:

$$L(p) = \int_a^b p(\theta) d\theta$$

  è lineare, come pure, per ogni intero positivo j, quella definita da:

$$L(p) = p^{(j)}(a)$$

(4) Il problema lineare di interpolazione definito da $\mathcal{F} = \text{span}\{ 1, \text{sen}\, x, \cos x \}$, $L_0(f) = f(\pi)$,

$$L_1(f) = \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta$$

e $y_0 = 2, y_1 = -6$ *non è un problema di interpolazione polinomiale.*
Si osservi che le funzioni $1, \text{sen}\, x$ e $\cos x$, sono funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ *linearmente indipendenti*: *se* $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ sono tali che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $a_1 + a_2\ \text{sen}\, x + a_3\ \cos x = 0$ *allora* $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

- *Riformulazione di un problema lineare di interpolazione.*

Lo spazio vettoriale $\mathcal{F}$ ha dimensione d. Sia $f_1(x), \dots, f_d(x)$ una sua *base* e:

$$\mathcal{F} = \{ a_1 f_1(x) + \cdots + a_d f_d(x) \text{ con } a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R} \}$$

la *rappresentazione parametrica* di $\mathcal{F}$ corrispondente.

Allora: $g(x) = a_1 f_1(x) + \cdots + a_d f_d(x)$ *è soluzione del problema lineare di interpolazione* se e solo se:

$$\begin{gathered} L_0(g) = a_1 L_0(f_1) + \cdots + a_d L_0(f_d) = y_0 \\ \vdots \\ L_k(g) = a_1 L_k(f_1) + \cdots + a_d L_k(f_k) = y_k \end{gathered}$$

ovvero *se e solo se la colonna*:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^d$$

è soluzione del sistema di equazioni lineari:

$$\begin{bmatrix} L_0(f_1) & L_0(f_2) & \cdots & L_0(f_d) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ L_k(f_1) & L_k(f_2) & \cdots & L_k(f_d) \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix}$$

Si osservi che si ottengono $k+1$ equazioni, *tante quante sono le condizioni* richieste a $g(x)$ e il numero di incognite è d, *pari alla dimensione di* $\mathcal{F}$, ovvero la matrice del sistema è $(k+1) \times d$. Inoltre, poiché $f_1(x), \dots, f_d(x)$ è una base di $\mathcal{F}$, l'insieme delle soluzioni del problema lineare di interpolazione e quello delle soluzioni del sistema di equazioni lineari sono in *corrispondenza biunivoca.* Questo è il motivo del termine *lineare* utilizzato nel nome.

- *Esercizio.*

Determinare gli elementi di $P_2(\mathbb{R})$ che verificano le condizioni:

$$p(1) = 2 \quad , \quad \int_0^6 p(t)\, dt = 0$$

Soluzione. Si verifica che il problema posto è lineare di interpolazione, dunque risolubile studiando un sistema di equazioni lineari. Il sistema risulta di *due equazioni* in *tre incognite* quindi il problema può avere *zero* soluzioni oppure *infinite.*

Si consideri la base di Newton di $P_2(\mathbb{R})$:

$$1 \quad , \quad x - 1 \qquad (x-1)x$$

Le condizioni si traducono nel sistema di *due* equazioni in *tre* incognite:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 12 & 54 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le soluzioni del sistema sono:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ -2 \end{bmatrix} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

dunque le (infinite) soluzioni del problema lineare di interpolazione sono:

$$p(x) = 2 \cdot 1 - (1 + 2\,t) \cdot (x-1) - 2\,t \cdot (x-1)x \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

(c) Campionamento e ricostruzione con interpolazione

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo non degenere. Si indica con $C(I)$ lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ delle funzioni *continue* definite su I a valori in $\mathbb{R}$.

- *Definizione* (funzione di campionamento, funzione di ricostruzione)

  Siano k un numero intero non negativo, $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo non degenere e $t_0, \ldots, t_k$ numeri reali *distinti* in I. La funzione $c : C(I) \to \mathbb{R}^{k+1}$ definita da:

  $$c(f) = \begin{bmatrix} f(t_0) \\ \vdots \\ f(t_k) \end{bmatrix}$$

  si chiama *funzione di campionamento agli istanti* (di campionamento) $t_0, \ldots, t_k$. L'applicazione c risulta *lineare* e *non invertibile*.

  Un'applicazione *lineare* $r : \mathbb{R}^{k+1} \to C(I)$ tale che:

  $$\text{per ogni } y \in \mathbb{R}^{k+1} \text{ si ha: } c\big(\, r(y)\,\big) = y$$

  ovvero tale che $r(y)$ *interpola i dati* $(t_0, y_0), \ldots, (t_k, y_k)$, si chiama *funzione di ricostruzione* (relativa a c).

- *Esempio* (ricostruzione mediante interpolazione polinomiale)

  Sia c la funzione di campionamento agli istanti $t_0, \ldots, t_k$. Dette $y_0, \ldots, y_k$ le componenti di $y \in \mathbb{R}^{k+1}$, la funzione $\rho : \mathbb{R}^{k+1} \to C(\mathbb{R})$ definita da:

  $$\rho(y) = \text{l'elemento di } P_k(\mathbb{R}) \text{ che interpola i dati } (t_0, y_0), \ldots, (t_k, y_k)$$

  è una funzione di ricostruzione relativa a c.

  Infatti: Utilizzando la *forma di Lagrange* del polinomio interpolante si constata che ρ *è lineare*; inoltre, per definizione, $\rho(y)$ interpola i dati $(t_0, y_0), \ldots, (t_k, y_k)$.

- *Definizione* (errore di ricostruzione)

  Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo *limitato* non degenere, c la funzione di campionamento agli istanti $t_0, \ldots, t_k \in I$, r una funzione di ricostruzione relativa a c e $f \in C(I)$. Il numero reale non negativo:

  $$e(f) = \max_{t \in I} \big|\, f(t) - r\big(\, c(f)\,\big)(t)\,\big|$$

  si chiama *errore di ricostruzione* di f. Si osservi che $e(f) = 0$ se e solo se $f = r\big(\, c(f)\,\big)$.

Il *problema del campionamento e ricostruzione* consiste nel *determinare condizioni sufficienti a garantire un errore di ricostruzione soddisfacentemente piccolo.*

Esercizi

---

1. Studiare i problemi lineari di interpolazione proposti nell'Esempio, punti (2), (3) e (4).
2. Determinare gli elementi $p \in P_2(\mathbb{R})$ che verificano le condizioni:

   $$p(0) = 0 \quad , \quad p'(0) = 0 \quad , \quad p(1) = 1$$

   Sia q uno di essi. Dimostrare che la funzione:

   $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ q(x) & \text{per } x \geqslant 0 \end{cases}$$

   è derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$ e la funzione derivata prima è continua.

3. Siano $t_0 = 0, t_1 = 1$ e $t_2 = 2$ istanti di campionamento in $I = [0, 2]$ e c la funzione di campionamento a tali istanti. Studiare il seguente problema lineare di interpolazione: determinare gli elementi $p \in P_3(\mathbb{R})$ tali che $c(p) = 0$.

4. Si considerino la funzione c di campionamento agli istanti t_0, t_1, t_2 e, dette y_0, y_1, y_2 le componenti di $y \in \mathbb{R}^3$, la funzione $\rho : \mathbb{R}^3 \to C(\mathbb{R})$ definita da:

$$\rho(y) = \text{l'elemento di } P_2(\mathbb{R}) \text{ che interpola i dati } (t_0, y_0), (t_1, y_1), (t_2, y_2)$$

Dimostrare che assegnati $y', y'' \in \mathbb{R}^3$ si ha:

$$\rho(3y' + 7y'') = 3\,\rho(y') + 7\,\rho(y'')$$