Lezione 26

In questa lezione si enuncia il *problema dell'interpolazione polinomiale* e si discute la sua soluzione.

3 Interpolazione

- *Problema* (dell'interpolazione polinomiale).

  Siano:

  * k un numero intero non negativo;
  * $P_k(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ dei *polinomi a coefficienti reali di grado al più* k, che consideriamo come *sottospazio dello spazio vettoriale su* $\mathbb{R}$ *delle funzioni continue*;
  * $x_0, \ldots, x_k$ numeri reali *distinti*;[1]
  * $y_0, \ldots, y_k$ numeri reali.

  Determinare gli elementi $p \in P_k(\mathbb{R})$ che *interpolano i dati*:

  $$(x_0, y_0), \ldots, (x_k, y_k)$$

  ovvero tali che:

  $$p(x_0) = y_0, \ldots, p(x_k) = y_k$$

- *Interpretazione geometrica.*

  Si considerano i dati:

  $$(x_0, y_0), \ldots, (x_k, y_k)$$

  come *coordinate di* $k+1$ *punti* in un piano cartesiano e si cercano *gli elementi di* $P_k(\mathbb{R})$ *il cui grafico contiene tutti i punti* assegnati.

- *Riformulazione del problema dell'interpolazione polinomiale.*

  Lo spazio vettoriale $P_k(\mathbb{R})$ ha dimensione $k+1$. Sia $q_0(x), \ldots, q_k(x)$ una sua *base* e:

  $$P_k(\mathbb{R}) = \{\, a_0 q_0(x) + \cdots + a_k q_k(x) \text{ con } a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{R} \,\}$$

  la *rappresentazione parametrica* di $P_k(\mathbb{R})$ corrispondente.

  Allora: $p(x) = a_0 q_0(x) + \cdots + a_k q_k(x)$ *è soluzione del problema di interpolazione polinomiale* se e solo se:

  $$\begin{aligned} p(x_0) &= a_0 q_0(x_0) + \cdots + a_k q_k(x_0) = y_0 \\ &\vdots \\ p(x_k) &= a_0 q_0(x_k) + \cdots + a_k q_k(x_k) = y_k \end{aligned}$$

  ovvero *se e solo se la colonna*:

  $$\begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{k+1}$$

  è soluzione del sistema di equazioni lineari:

  $$\begin{bmatrix} q_0(x_0) & q_1(x_0) & \cdots & q_k(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_0(x_k) & q_1(x_k) & \cdots & q_k(x_k) \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix}$$

  Si osservi che si ottengono *tante equazioni quante sono le condizioni* richieste a $p(x)$ e *il numero di incognite è pari alla dimensione* di $P_k(\mathbb{R})$. Inoltre, poiché $q_0(x), \ldots, q_k(x)$ è una base di $P_k(\mathbb{R})$, l'insieme delle soluzioni del problema di interpolazione polinomiale e quello delle soluzioni del sistema di equazioni lineari sono in *corrispondenza biunivoca*.

[1] Ovvero: $i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$

- *Teorema* (di esistenza ed unicità della soluzione).

  Siano k un numero intero non negativo, $x_0, \ldots, x_k$ numeri reali distinti e $y_0, \ldots, y_k$ numeri reali. *Esiste un solo elemento in* $P_k(\mathbb{R})$ *che interpola i dati* $(x_0, y_0), \ldots, (x_k, y_k)$.

  Dimostrazione. Siano $\ell_0(x), \ldots, \ell_k(x)$ gli elementi di $P_k(\mathbb{R})$ definiti da:

$$\ell_j(x) = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\cdots(x - x_k)}{(x_j - x_0)\cdots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\cdots(x_j - x_k)} \quad , \quad j = 0, \ldots, k$$

  Si osservi che per ogni j si ha:

  * $\ell_j(x_j) = 1$
  * se $i \neq j$ allora $\ell_j(x_i) = 0$

  Allora i $k + 1$ polinomi $\ell_0(x), \ldots, \ell_k(x)$ sono *linearmente indipendenti.* Infatti, se $a_0, \ldots, a_k$ sono coefficienti tali che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha:

$$a_0\ell_0(x) + \cdots + a_k\ell_k(x) = 0$$

  allora per $j = 0, \ldots, k$ si ha:

$$0 = a_0\ell_0(x_j) + \cdots + a_k\ell_k(x_j) = a_j$$

  Dunque $\ell_0(x), \ldots, \ell_k(x)$ sono una *base* di $P_k(\mathbb{R})$ detta *base di Lagrange.* Inoltre:

$$\begin{bmatrix} \ell_0(x_0) & \ell_1(x_0) & \cdots & \ell_k(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \ell_0(x_k) & \ell_1(x_k) & \cdots & \ell_k(x_k) \end{bmatrix} = I$$

  Allora il problema di interpolazione polinomiale ha *una ed una sola soluzione*:

$$p(x) = y_0\ell_0(x) + \cdots + y_k\ell_k(x)$$

  L'espressione trovata prende il nome di *forma di Lagrange del polinomio interpolante.*

- *Esercizio.*

  Determinare l'elemento di $P_2(\mathbb{R})$ che interpola i dati: $(-1, 0), (0, 1), (2, -2)$.

  Soluzione. Numerati i dati nell'ordine delle ascisse, la *base di Lagrange* di $P_2(\mathbb{R})$ è:

  * $\ell_0(x) = \dfrac{(x - 0)(x - 2)}{(-1 - 0)(-1 - 2)} = \frac{1}{3}(x^2 - 2x)$
  * $\ell_1(x) = \dfrac{(x + 1)(x - 2)}{(0 + 1)(0 - 2)} = -\frac{1}{2}(x^2 - x - 2)$
  * $\ell_2(x) = \dfrac{(x + 1)(x - 0)}{(2 + 1)(2 - 0)} = \frac{1}{6}(x^2 + x)$

  e l'elemento cercato, in *forma di Lagrange*, è:

$$p(x) = 0 \cdot \ell_0(x) + 1 \cdot \ell_1(x) - 2 \cdot \ell_2(x)$$

  Lo stesso elemento può essere individuato utilizzando la più usuale *base di Vandermonde* di $P_2(\mathbb{R})$:

$$1, x, x^2$$

  In questo caso il sistema di equazioni a cui si riducono le condizioni di interpolazione è:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

  Risolvendo il sistema si ottiene l'elemento cercato in *forma di Vandermonde*:

$$p(x) = 1 \cdot 1 + \tfrac{1}{6} \cdot x - \tfrac{5}{6} \cdot x^2$$

- *Osservazione* (forma di Newton del polinomio interpolante).

  La scelta della base in $P_k(\mathbb{R})$ *non* fa cambiare la soluzione del problema di interpolazione in esame *ma* può agevolare o meno il calcolo della soluzione. La *base di Lagrange*, di non immediata manipolazione, genera il sistema di equazioni lineari *più semplice* da risolvere per la determinazione dei coefficienti perché la matrice del sistema è I. La più usuale *base di Vandermonde*, invece, genera un sistema di equazioni *non semplice* da risolvere perché la matrice del sistema è la *matrice di Vandermonde* (vedere l'Esercizio 2) e la soluzione del sistema richiede la sua fattorizzazione. Una terza scelta è la *base di Newton*:

  $$1, x - x_0, (x - x_0)(x - x_1), \dots, (x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})$$

  Gli elementi di questa base sono polinomi *di grado crescente* e le condizioni di interpolazione si traducono in un sistema di equazioni lineari con *matrice triangolare inferiore*, dunque semplice da risolvere.

- *Esercizio.*

  Assegnati i dati $(0,1), (-1,2), (3,10), (1,10)$:

  (a) Determinare la *forma di Newton* del polinomio interpolante utilizzando i dati nell'ordine in cui sono stati assegnati;

  (b) Determinare la forma di Newton del polinomio interpolante ordinando i dati secondo ascisse crescenti;

  (c) Calcolare il *valore* del polinomio interpolante in $-1, 0, 1, 2, 3, 4$.

  Soluzione. (a) Sono stati assegnati quattro dati: $k = 3$. Utilizzando i dati nell'ordine in cui sono stati assegnati la *base di Newton* di $P_3(\mathbb{R})$ risulta:

  $$1, x, x(x + 1), x(x + 1)(x - 3)$$

  Le condizioni di interpolazione si traducono nel sistema:

  $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 12 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

  La soluzione b del sistema si ottiene con la procedura SA:

  $$b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad p(x) = 1 \cdot 1 - 1 \cdot x + 1 \cdot x(x + 1) - 2 \cdot x(x + 1)(x - 3)$$

  (b) *Lasciata al lettore.*

  (c) Un procedimento per calcolare il valore di p in $a \in \mathbb{R}$ è, dette $x_0, \dots, x_k$ le ascisse dei dati nell'ordine considerato e b la colonna di componenti i coefficienti $b_0, \dots, b_k$:

  (1) $r_0 = 1; r_1 = a - x_0;$ `per` $j = 2, \dots, k$ `ripeti` $r_j = r_{j-1}(a - x_{j-1});$

  (2) $r = (r_0, \dots, r_k); p(a) = r\, b$

  In (1) si calcolano i valori degli elementi della base di Newton in a, in (2) si calcola il valore in a della combinazione lineare che realizza il polinomio interpolante. La procedura richiede $2k$ somme e $2k - 1$ prodotti. Per il calcolo in m punti sono richieste $2mk$ somme e $2m(k - 1)$ prodotti e quindi il costo del calcolo è: $(4k - 1)m$. Nel caso in esame si ottiene:

  $$\begin{bmatrix} p(-1) \\ p(0) \\ p(1) \\ p(2) \\ p(3) \\ p(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 6 & -6 \\ 1 & 3 & 12 & 0 \\ 1 & 4 & 20 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 10 \\ 17 \\ 10 \\ -23 \end{bmatrix}$$

Esercizi

1. Verificare che le due forme, di *Lagrange* e *Vandermonde*, dell'elemento di $P_2(\mathbb{R})$ che interpola i dati determinate nel primo Esercizio individuano lo stesso polinomio.

2. Siano k un intero non negativo e $1, \dots, x^k$ la *base di Vandermonde* di $P_k(\mathbb{R})$. Assegnati $x_0, \dots, x_k$ numeri reali *distinti* e $y_0, \dots, y_k$ numeri reali, verificare che il sistema di equazioni lineari a cui si riducono le condizioni di interpolazione è:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^k \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_k & x_k^2 & \cdots & x_k^k \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix}$$

   In base al Teorema di esistenza ed unicità della soluzione, la matrice del sistema, nota come *matrice di Vandermonde* relativa ai punti $x_0, \dots, x_k$, è *invertibile.*

3. Realizzare in *Scilab* una procedura che *dati* un vettore a di m componenti e due vettori x e b di $k+1$ componenti, *restituisce* il vettore p di componente j-esima:

$$p_j = b_0 + b_1(a_j - x_0) + \cdots + b_k(a_j - x_0)\cdots(a_j - x_{k-1}) \quad , \quad j = 1, \dots, m$$

   Utilizzare poi la procedura per disegnare, su uno stesso piano cartesiano, in rosso *il grafico* del polinomio del punto (a) del secondo Esercizio e con crocette *i dati* interpolati.

4. Dopo aver rappresentato i dati $(0,0), (1,1), (3,3), (4,4)$ su un piano cartesiano, determinare la forma di Vandermonde e la forma di Newton del polinomio interpolante.

5. Sia $Q : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la funzione definita da:

$$Q(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

   Sapendo che $Q(x) \in P_3(\mathbb{R})$, determinare la forma di Newton di Q e dedurne la forma di Vandermonde.