Lezione 24

In questa lezione si discute l'uso del calcolatore per la realizzazione delle procedure SA, SI ed EGP e si inizia la descrizione di un procedimento per la ricerca di una *fattorizzazione QR* di una matrice. Le parti di testo in magenta sono asserti *omessi in classe*.

(E) Uso del calcolatore

Si ricordi che, assegnata una matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ed una colonna $b \in \mathbb{R}^n$, il procedimento di ricerca della soluzione del sistema di equazioni lineari $Ax = b$ basato sulla fattorizzazione LR consiste dei seguenti passi: (1) Applicazione ad A della procedura EGP; (2) Se il passo precedente è terminato correttamente determinando la terna di matrici S, D, P: applicazione della procedura SA per il calcolo della soluzione c del sistema $Sx = Pb$; (3) Se $d_{nn} \neq 0$: applicazione della procedura SI per il calcolo della soluzione x^* del sistema $Dx = c$. Il vettore finale è la soluzione del sistema $Ax = b$.

Utilizzando il calcolatore (che, si ricordi, opera in $F(\beta, m)$), il procedimento si modifica come segue: (0) I dati A e b del sistema si trasformano in $\hat{A}$ e $\hat{b}$, matrice e colonna di elementi $\mathrm{rd}(a_{ij}), \mathrm{rd}(b_i), i, j = 1, \ldots, n$; (1) Applicazione ad $\hat{A}$ della procedura `EGP`, realizzazione di EGP; (2) Se il passo precedente è terminato correttamente determinando la terna di matrici $\hat{S}, \hat{D}, \hat{P}$: applicazione della procedura `SA`, realizzazione di SA, alla coppia $\hat{S}, \hat{P}\hat{b}$ per il calcolo del vettore $\hat{c}$; (3) Se $\hat{d}_{nn} \neq 0$: applicazione della procedura `SI`, realizzazione di SI, alla coppia $\hat{D}, \hat{c}$ per il calcolo del vettore $\hat{x}$. Il vettore finale è utilizzato per approssimare x^*.

Ci proponiamo di studiare l'accuratezza dell'approssimazione.

- *Osservazione*
  - *Interpretazione di* `SI`.
    Siano $T \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ una matrice triangolare superiore invertibile e $c \in \mathbb{R}^2$. Operando in $\mathbb{R}$ la procedura SI determina la soluzione del sistema:

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ 0 & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

calcolando:

(1) $x_2 = c_2/t_{22}$;
(2) $s_1 = c_1 - t_{12}x_2$ e poi $x_1 = s_1/t_{11}$ ovvero: $x_1 = (c_1 - t_{12}x_2)/t_{11}$.

Operando con il calcolatore, *supponendo che gli elementi di T e c siano numeri di macchina*, la procedura `SI` calcola:

(1) $\xi_2 = c_2 \oslash t_{22}$;
(2) $\sigma_1 = c_1 \ominus (t_{12} \otimes \xi_2)$ e poi $\xi_1 = \sigma_1 \oslash t_{11}$.

Ricordando la definizione di pseudo-operazioni aritmetiche si ha: esistono $e_1, \ldots, e_4 \in \mathbb{R}$ con $|\, e_k \,| \leqslant u$ per $k = 1, \ldots, 4$ tali che:

$$\xi_2 = (1 + e_1)\, c_2/t_{22} \quad , \quad \sigma_1 = (1 + e_3)\big(c_1 - (1 + e_2)\, t_{12}\xi_2\big) \quad \text{e} \quad \xi_1 = (1 + e_4)\, \sigma_1/t_{11}$$

Posto poi:

$$t'_{22} = t_{22}/(1 + e_1) \quad , \quad t'_{12} = (1 + e_2)\, t_{12} \quad \text{e} \quad t'_{11} = t_{11}/\big((1 + e_3)(1 + e_4)\big)$$

si ottiene:

$$\xi_2 = c_2/t'_{22} \quad \text{e} \quad \xi_1 = (c_1 - t'_{12}\xi_2)/t'_{11}$$

ovvero $\mathtt{SI}(T, c)$ è la soluzione del sistema:

$$\begin{bmatrix} t'_{11} & t'_{12} \\ 0 & t'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

con:

$$t'_{22} \approx t_{22} \quad , \quad t'_{12} \approx t_{12} \quad \text{e} \quad t'_{11} \approx t_{11}$$

In generale si dimostra la seguente *interpretazione*:

$$\texttt{SI}(T,c) = \mathrm{SI}(T',c) \quad \text{con} \quad T' \text{ triangolare superiore tale che } t'_{ij} \approx t_{ij} \text{ per ogni } i,j$$

L'interpretazione mostra anche che l'algoritmo `SI` è *stabile* quando utilizzato per approssimare la funzione SI. Più precisamente, l'algoritmo è *stabile all'indietro*: per ogni dato X, `SI` fornisce *il valore* della funzione SI in un punto vicino a X. Si ricordi che la stabilità richiede, per ogni dato X, che l'algoritmo di fornisca *un'approssimazione accurata* del valore della funzione in un punto vicino ad X.

– *Inadeguatezza della procedura EGP.*
  Si è visto che: $x^* = \mathrm{SI}(D,c)$ e $\hat{x} = \texttt{SI}(\hat{D},\hat{c}) = \mathrm{SI}(\hat{D}',\hat{c})$. Per giudicare l'accuratezza di $\hat{x}$ come approssimazione di x^* occorre studiare il *condizionamento* del calcolo della soluzione del sistema $Dx = c$, ovvero indagare il *numero di condizionamento* della matrice D.

  * *Esempio*
    Sia $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ e:

    $$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

    Allora:

    · La procedura EGP applicata ad A termina correttamente e produce:

    $$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/\alpha & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad D = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & -1/\alpha \end{bmatrix} \quad , \quad P = I$$

    · Si ottiene:

    $$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\alpha & 1 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix}$$

    Il numero di condizionamento di D, utilizzando ad esempio la norma infinito in $\mathbb{R}^2$ è quindi:

    $$c(D) = \| D^{-1} \| \| D \| = \frac{\alpha+1}{\alpha^2}$$

    Allora:

    $$\lim_{\alpha \to 0} c(D) = +\infty$$

    Inoltre:

    $$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\alpha \end{bmatrix}$$

    e:

    $$c(A) = (1+\alpha)^2 < 3$$

    Per α sufficientemente piccolo, *il fattore destro D prodotto dalla procedura* EGP *ha numero di condizionamento arbitrariamente più alto di A.* Ovvero il procedimento basato su EGP ha trasformato il sistema $Ax = b$, con *buone* proprietà di condizionamento, nel sistema *equivalente* $Dx = c$ che ha però proprietà di condizionamento, per α piccolo, *pessime.*

  La procedura EGP, soddisfacente quando si opera in $\mathbb{R}$, risulta *inadeguata* quando si opera in $F(\beta, m)$.

• *La procedura EGPP.*

Per ovviare al problema evidenziato nell'Esempio, si modifica la procedura EGP. Precisamente: *Al passo k-esimo si determina l'indice $j \geqslant k$ tale che*:

$$\max\{ | a_{kk}^{(k)} |, \ldots, | a_{nk}^{(k)} | \} = | a_{jk}^{(k)} |$$

e si pone:

$$P_k = \begin{cases} I & se\ j = k \\ P_{kj} & se\ j > k \end{cases}$$

La procedura così ottenuta si chiama EGPP (*E*liminazione di *G*auss con *P*ivotong *P*arziale). Applicata alla matrice A dell'ultimo Esempio termina correttamente e fornisce:

$$\mathrm{EGPP}(A) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}, I, P_{12} \right)$$

e quindi $c(D) = 1$.

In generale si ha:

– *Teorema.*

Per ogni numero intero positivo n esiste un numero reale k_n (che dipende dalla norma scelta in $\mathbb{R}^n$) tale che: la procedura EGPP applicata ad $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertibile termina correttamente e produce un fattore destro D con $c(D) \leqslant k_n\, c(A)$.

- *Dimostrazione.*

Sia $\mathrm{EGPP}(A) = (S, D, P)$. Allora:

$$D = S^{-1}PA \quad \text{e} \quad D^{-1} = A^{-1}P^{-1}S$$

Scelta in $\mathbb{R}^n$ una tra le norme N_1, N_2 e N_∞, per ogni matrice di permutazione M si ha: $\|\, M\,\| = 1$ e quindi:

$$c(D) \leqslant c(S)\, c(A)$$

La tecnica del *pivoting parziale* garantisce che per ogni $k = 1, \ldots, n-1$ *il valore assoluto degli elementi non nulli della matrice* H_k *non supera uno.* Allora lo stesso vale per gli elementi della matrice S. Quindi:

$$\|\, S\,\|_1 \leqslant n \quad \text{e} \quad \|\, S\,\|_\infty \leqslant n$$

Per ogni matrice A si ha: $\|\, A\,\|_2 \leqslant \sqrt{\|\, A\,\|_1 \|\, A\,\|_\infty}$. Allora si ha anche:

$$\|\, S\,\|_2 \leqslant n$$

Inoltre si ha:

$$S = PP_1^{-1}H_1^{-1} \cdots P_{n-1}^{-1}H_{n-1}^{-1} \quad \Rightarrow \quad S^{-1} = H_{n-1}P_{n-1} \cdots H_1P_1P^{-1}$$

da cui:

$$\|\, S^{-1}\,\|_\infty \leqslant \|\, H_{n-1}\,\|_\infty \cdots \|\, H_1\,\|_\infty \leqslant 2 \cdots 2 = 2^{n-1}$$

Per ogni $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ si ha: $\|\, A\,\|_1 \leqslant \sqrt{n}\,\|\, A\,\|_2$ e $\|\, A\,\|_2 \leqslant \sqrt{n}\,\|\, A\,\|_\infty$. Dunque:

$$\|\, S^{-1}\,\|_1 \leqslant n\, 2^{n-1} \quad \text{e} \quad \|\, S^{-1}\,\|_2 \leqslant \sqrt{n}\, 2^{n-1}$$

Dalle disuguaglianze ottenute si ricava:

$$c_1(S) \leqslant n^2\, 2^{n-1} \quad , \quad c_2(S) \leqslant n^{3/2}\, 2^{n-1} \quad , \quad c_\infty(S) = n\, 2^{n-1}$$

da cui l'asserto.

(F) Ricerca di fattorizzazioni QR

L'esempio seguente descrive un procedimento di ricerca di una *fattorizzazione QR* di un'assegnata matrice.

- *Esempio*

Si consideri $\mathbb{R}^3$ con prodotto scalare canonico (per ogni $a, b \in \mathbb{R}^3$: $a \cdot b = b^\mathsf{T} a$). Sia $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ di colonne a_1, a_2, a_3.

– *Primo passo*

Si cercano $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ a colonne ortogonali e $\Theta \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ triangolare superiore con $\theta_{kk} = 1$, $k = 1, 2, 3$, tali che $\Omega\Theta = A$, ovvero tali che:

$$\omega_1 = a_1 \quad , \quad \omega_1\theta_{12} + \omega_2 = a_2 \quad , \quad \omega_1\theta_{13} + \omega_2\theta_{13} + \omega_2 = a_3$$

Se esistono matrici siffatte, allora *necessariamente*:

$$\omega_1 = a_1 \quad , \quad \omega_2 = a_2 - \omega_1\theta_{12} \quad , \quad \omega_3 = a_3 - \omega_1\theta_{13} - \omega_2\theta_{23}$$

Inoltre:

$$\omega_1 \cdot \omega_2 = 0 \quad \text{se e solo se} \quad (\omega_1 \cdot \omega_1)\,\theta_{12} = a_2 \cdot \omega_1$$

e:

$$\omega_3 \cdot \omega_1 = 0 \quad \text{se e solo se} \quad (\omega_1 \cdot \omega_1)\,\theta_{13} + (\omega_2 \cdot \omega_1)\,\theta_{23} = a_3 \cdot \omega_1$$

$$\omega_3 \cdot \omega_2 = 0 \quad \text{se e solo se} \quad (\omega_1 \cdot \omega_2)\,\theta_{13} + (\omega_2 \cdot \omega_2)\,\theta_{23} = a_3 \cdot \omega_2$$

La procedura seguente determina Ω e Θ con le proprietà richieste se e solo se *le prime due colonne di A sono linearmente indipendenti*:

* $\omega_1 = a_1$;
* `se` $\omega_1 = 0$ `allora`: interrompi la costruzione;

  `altrimenti`: $\theta_{12} = \dfrac{a_2 \cdot \omega_1}{\omega_1 \cdot \omega_1}$; $\omega_2 = a_2 - \omega_1\theta_{12}$;
* $\theta_{13} = \dfrac{a_3 \cdot \omega_1}{\omega_1 \cdot \omega_1}$;
* `se` $\omega_2 = 0$ `allora`: interrompi la costruzione;

  `altrimenti`: $\theta_{23} = \dfrac{a_3 \cdot \omega_2}{\omega_2 \cdot \omega_2}$; $\omega_3 = a_3 - \omega_1\theta_{13} - \omega_2\theta_{23}$;
* $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \quad , \quad \Theta = \begin{bmatrix} 1 & \theta_{12} & \theta_{13} \\ 0 & 1 & \theta_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Esercizi

---

1. Siano $T \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ una matrice triangolare inferiore invertibile e $c \in \mathbb{R}^2$. Mostrare che, *supponendo che gli elementi di T e c siano numeri di macchina*, la realizzazione `SA` della procedura di sostituzione in avanti SA ammette un'interpretazione simile a quella di `SI`:

$$\texttt{SA}(T, c) = \mathrm{SA}(T', c) \quad \text{con} \quad T' \text{ triangolare inferiore tale che } t'_{ij} \approx t_{ij} \text{ per ogni } i, j$$

2. Sia:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Determinare EGPP(A).

Soluzione:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad P = P_{23}P_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Sia:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Utilizzare la procedura descritta nell'Esempio finale per cercare $\Omega \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ a colonne ortogonali e $\Theta \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ triangolare superiore con $\theta_{kk} = 1$, $k = 1, 2, 3$, tali che $\Omega\Theta = A$.