Lezione 23

In questa lezione si conclude lo studio del *condizionamento* del problema del calcolo della soluzione di un sistema di equazioni lineari. Le parti di testo in magenta sono asserti *omessi in classe*.

- *Secondo caso*: $\delta A \neq 0$, $\delta b = 0$.

  Si ricordi che si considerano solo perturbazioni δA tali che $A + \delta A$ invertibile. Si ha:

  $$(A + \delta A)\hat{x} = b = Ax^*$$

  da cui:

  $$A\,\delta x = A(\hat{x} - x^*) = -\delta A\,\hat{x}$$

  Per la variazione δx si ottiene allora:

  $$\delta x = -A^{-1}\delta A\,\hat{x}$$

  e quindi:

  $$\|\,\delta x\,\| = \|\,A^{-1}\delta A\,\hat{x}\| \leqslant \|\,A^{-1}\delta A\,\|\,\|\,\hat{x}\,\|$$

  Si osservi che per la prima delle Proprietà della norma indotta, *nell'ultima relazione sussiste l'uguaglianza* per qualche $\hat{x} \neq 0$ ovvero *per qualche* $b \neq 0$. Si ha poi, per la seconda delle Proprietà della norma indotta:

  $$\|\,A^{-1}\delta A\,\| \leqslant \|\,A^{-1}\,\|\,\|\,\delta A\,\|$$

  Si osservi che *nella relazione sussiste l'uguaglianza per qualche* δA *tale che* $A + \delta A$ *invertibile* (ad esempio per $\delta A = \alpha\, I$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ sufficientemente piccolo). Dunque:

  $$\|\,\delta x\,\| \leqslant \|\,A^{-1}\,\|\,\|\,\delta A\,\|\,\|\,\hat{x}\,\|$$

  Introducendo come misura relativa della variazione la quantità (si osservi che $\|\,\hat{x}\,\| \neq 0$ perché $b \neq 0$):

  $$\hat{\epsilon}_x = \frac{\|\,\delta x\,\|}{\|\,\hat{x}\,\|}$$

  si ottiene:

  $$\hat{\epsilon}_x \leqslant \|\,A^{-1}\,\|\,\|\,\delta A\,\| = \|\,A^{-1}\,\|\,\|\,A\,\|\,\frac{\|\,\delta A\,\|}{\|\,A\,\|}$$

  Con le notazioni introdotte si riscrive il risultato ottenuto nella forma:

  - *Teorema* (di condizionamento, II).

    Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertibile. Allora: per ogni vettore non nullo $b \in \mathbb{R}^n$ ed ogni $\delta A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tale che $A + \delta A$ invertibile si ha:

    $$\hat{\epsilon}_x \leqslant c(A)\,\epsilon_A$$

    e nella relazione sussiste l'uguaglianza per qualche $b \neq 0$ e qualche δA tale che $A + \delta A$ invertibile.

- *Caso generale*: $\delta A \neq 0$, $\delta b \neq 0$.

  Dati $\delta b \in \mathbb{R}^n$ e $\delta A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tale che $A + \delta A$ invertibile, siano: $\hat{x}$ la soluzione del sistema perturbato $(A + \delta A)x = b + \delta b$, x' la soluzione del sistema perturbato $Ax = b + \delta b$ e x^* la soluzione del sistema $Ax = b$. Allora, posto:

  $$\epsilon_A = \frac{\|\,\delta A\,\|}{\|\,A\,\|} \quad , \quad \epsilon_b = \frac{\|\,\delta b\,\|}{\|\,b\,\|} \quad \text{e} \quad \epsilon_x = \frac{\|\,\hat{x} - x^*\,\|}{\|\,x^*\,\|}$$

  si ha:

(1) Per quanto mostrato nei casi particolari:

$$\frac{\|\,\hat{x}-x'\,\|}{\|\,\hat{x}\,\|} \leqslant c(A)\,\epsilon_A$$

e:

$$\frac{\|\,x'-x^*\,\|}{\|\,x^*\,\|} \leqslant c(A)\,\epsilon_b$$

(2) $\epsilon_x = \dfrac{\|\,\hat{x}-x^*\,\|}{\|\,x^*\,\|} \leqslant \dfrac{\|\,\hat{x}-x'\,\|}{\|\,x^*\,\|} + \dfrac{\|\,x'-x^*\,\|}{\|\,x^*\,\|} = \dfrac{\|\,\hat{x}-x'\,\|}{\|\,\hat{x}\,\|}\,\dfrac{\|\,\hat{x}\,\|}{\|\,x^*\,\|} + \dfrac{\|\,x'-x^*\,\|}{\|\,x^*\,\|}$

(3) $\dfrac{\|\,\hat{x}\,\|}{\|\,x^*\,\|} \leqslant \dfrac{\|\,\hat{x}-x^*\,\|}{\|\,x^*\,\|} + 1 = \epsilon_x + 1$

Quindi:

$$\epsilon_x \leqslant c(A)\,\epsilon_A\,(\epsilon_x+1) + c(A)\,\epsilon_b$$

ovvero:

$$\big(1-c(A)\,\epsilon_A\big)\,\epsilon_x \leqslant c(A)\,(\epsilon_A+\epsilon_b)$$

Si ottiene:

- *Teorema* (di condizionamento, III).
  Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertibile. Allora: per ogni vettore non nullo $b \in \mathbb{R}^n$, ogni $\delta A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tale che $A+\delta A$ invertibile ed ogni $\delta b \in \mathbb{R}^n$ si ha:

$$c(A)\,\epsilon_A < 1 \quad \Rightarrow \quad \epsilon_x \leqslant \frac{c(A)}{1-c(A)\,\epsilon_A}\,(\epsilon_A+\epsilon_b)$$

- *Osservazione.*
  - Sia N una norma in $\mathbb{R}^n$ ed $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertibile. Allora: $c(A) \geqslant 1$.
    (Infatti: $I = A^{-1}A$ e quindi $1 = \|\,I\,\|_N = \|\,A^{-1}A\,\|_N \leqslant \|\,A^{-1}\,\|_N\|\,A\,\|_N = c(A)$.)
  - Siano $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertibile e $\delta A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Se $c(A)\,\epsilon_A < 1$ allora $A+\delta A$ invertibile.
    (Infatti: $c(A)\,\epsilon_A = \|\,A^{-1}\,\|\,\|\,\delta A\,\|$ e quindi per l'ipotesi:

$$\|\,A^{-1}\delta A\,\| \leqslant \|\,A^{-1}\,\|\,\|\,\delta A\,\| < 1$$

    Inoltre: $A+\delta A = A\,(I+A^{-1}\delta A)$, dunque:

$$A+\delta A \text{ invertibile} \quad \Leftrightarrow \quad I+A^{-1}\delta A \text{ invertibile}$$

    Infine: Se per qualche $v \neq 0$ si ha $(I+A^{-1}\delta A)v = 0$ allora si ha anche: $v = -A^{-1}\delta A\,v$ e quindi $N(v) = N(A^{-1}\delta A\,v) \leqslant \|\,A^{-1}\delta A\,\|\,N(v)$, ovvero $\|\,A^{-1}\delta A\,\| \geqslant 1$.)
    Dunque:

$$\epsilon_A < \frac{1}{c(A)} \quad \Rightarrow \quad A+\delta A \text{ invertibile}$$

  - Sia $x \in \mathbb{R}^n$ un vettore non nullo e $\delta x \in \mathbb{R}^n$. Si consideri, per ogni k tale che $x_k \neq 0$, la misura relativa della *componente k-esima* dello scostamento:

$$\frac{|\,\delta x_k\,|}{|\,x_k\,|}$$

    Poiché per ogni vettore $y \in \mathbb{R}^n$ ed ogni k si ha $|\,y_k\,| \leqslant \|\,y\,\|$, allora:

$$\frac{|\,\delta x_k\,|}{|\,x_k\,|} \leqslant \frac{\|\,\delta x\,\|}{|\,x_k\,|} = \frac{\|\,\delta x\,\|}{\|\,x\,\|}\,\frac{\|\,x\,\|}{|\,x_k\,|} = \epsilon_x\,\frac{\|\,x\,\|}{|\,x_k\,|}$$

    con:

$$\frac{\|\,x\,\|}{|\,x_k\,|} \geqslant 1$$

    Dunque: *la misura relativa della componente k-esima dello scostamento può essere molto maggiore della misura relativa del vettore scostamento.*

- *Osservazione* (applicazione del Teorema di condizionamento).

  Dati $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertibile, b elemento non nullo di $\mathbb{R}^n$ e $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, si utilizza $\hat{x}$ per approssimare la soluzione x^* del sistema $Ax = b$. Per ottenere informazioni sull'accuratezza dell'approssimazione, si introduce il vettore:

  $$r = A\hat{x} - b$$

  detto *residuo* di $Ax = b$ associato ad $\hat{x}$.

  - *Primo caso*

    Si consideri la seguente *interpretazione* di $\hat{x}$:

    $$\hat{x} \text{ è la soluzione del } \textit{sistema perturbato } Ax = b + r$$

    Per il Teorema di condizionamento, posto $\delta b = r$ si ha:

    $$\frac{\| \hat{x} - x^* \|}{\| x^* \|} \leqslant c(A) \frac{\| r \|}{\| b \|}$$

    Si ottiene *una limitazione dell'errore relativo commesso approssimando x^* con $\hat{x}$.*

  - *Secondo caso*

    Siano $\hat{x} \neq 0$ e $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tale che $M\hat{x} = -r$.

    (La condizione $\hat{x} \neq 0$ è sufficiente a garantire l'esistenza di matrici M tali che $M\hat{x} = -r$. Ad esempio:

    $$M = -\frac{r\hat{x}^{\mathsf{T}}}{\hat{x}^{\mathsf{T}}\hat{x}}$$

    Se $\hat{x} = 0$, invece, esistono matrici con la proprietà richiesta se e solo se anche $r = 0$.)

    Se $A + M$ invertibile, si consideri la seguente *interpretazione* di $\hat{x}$:

    $$\hat{x} \text{ è la soluzione del } \textit{sistema perturbato } (A + M)x = b$$

    Per il Teorema di condizionamento, posto $\delta A = M$ si ha:

    $$\frac{\| \hat{x} - x^* \|}{\| \hat{x} \|} \leqslant c(A) \frac{\| M \|}{\| A \|}$$

    Si ottiene *una limitazione dell'errore relativo commesso approssimando $\hat{x}$ con x^*.*

    * Per ottenere una limitazione dell'errore relativo commesso approssimando x^* con $\hat{x} = x^* + \delta x$ si osserva che:

      $$\epsilon_x = \frac{\| \delta x \|}{\| x^* \|} = \frac{\| \delta x \|}{\| \hat{x} \|} \frac{\| \hat{x} \|}{\| x^* \|} = \hat{\epsilon}_x \frac{\| \hat{x} \|}{\| x^* \|}$$

      e:

      $$\frac{\| \hat{x} \|}{\| x^* \|} = \frac{\| \hat{x} - x^* + x^* \|}{\| x^* \|} \leqslant \frac{\| \hat{x} - x^* \|}{\| x^* \|} + 1 = \hat{\epsilon}_x + 1$$

      Allora:

      $$\epsilon_x \leqslant \hat{\epsilon}_x \, (\hat{\epsilon}_x + 1)$$

      ovvero:

      $$\epsilon_x \, (1 - \hat{\epsilon}_x) \leqslant \hat{\epsilon}_x$$

      Dunque:

      $$\hat{\epsilon}_x < 1 \quad \Rightarrow \quad \epsilon_x \leqslant \frac{\hat{\epsilon}_x}{1 - \hat{\epsilon}_x}$$

    Se:

    $$\alpha \equiv c(A) \frac{\| M \|}{\| A \|} < 1$$

    si ottiene infine *una limitazione dell'errore relativo commesso approssimando x^* con $\hat{x}$*:

    $$\frac{\| \hat{x} - x^* \|}{\| x^* \|} \leqslant \frac{\alpha}{1 - \alpha}$$

- *Esempio*

  Si consideri $\mathbb{R}^2$ con norma N_1 e siano:

  $$A = \begin{bmatrix} 20 & 1 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix} \quad , \quad \hat{x} = \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

  Si approssima la soluzione x^* del sistema $Ax = b$ con $\hat{x}$. Studiare l'accuratezza dell'approssimazione.

  – Si ha, dopo aver calcolato A^{-1}:

  $$c(A) = \| A^{-1} \| \| A \| = \tfrac{21}{400}\, 21 = \tfrac{441}{400} \approx 1$$

  Inoltre il *residuo* di $Ax = b$ associato ad $\hat{x}$ vale:

  $$r = A\hat{x} - b = \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  – Si interpreta $\hat{x}$ come soluzione del sistema $Ax = b + r$. La misura relativa della perturbazione è:

  $$\epsilon_b = \frac{\| r \|}{\| b \|} = \tfrac{1}{40}$$

  Dal Teorema di condizionamento si ottiene allora:

  $$\epsilon_x \leqslant c(A)\, \epsilon_b = \tfrac{441}{400} \tfrac{1}{40} \equiv \alpha_1 \approx 2.76 \cdot 10^{-2}$$

  – Posto:

  $$\delta A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  si osserva che $A+\delta A$ è invertibile e si interpreta $\hat{x}$ come soluzione del sistema $(A+\delta A)x = b$. La misura relativa della perturbazione è:

  $$\epsilon_A = \frac{\| \delta A \|}{\| A \|} = \tfrac{1}{21}$$

  Dal Teorema di condizionamento si ottiene allora:

  $$\hat{\epsilon}_x \leqslant c(A)\, \epsilon_A = \tfrac{441}{400} \tfrac{1}{21} = \tfrac{21}{400} \equiv \alpha_2 = 5.25 \cdot 10^{-2}$$

  Essendo $\alpha_2 < 1$ si ha allora:

  $$\epsilon_x \leqslant \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_2} \approx 5.54 \cdot 10^{-2}$$

  La limitazione ottenuta nel secondo caso è *peggiore* di quella ottenuta nel primo (infatti: $5.54 \cdot 10^{-2} > 2.76 \cdot 10^{-2}$). Se ne conclude che, utilizzando la norma N_1, l'errore relativo commesso approssimando x^* con $\hat{x}$ non supera $\alpha_1 \approx 2.76 \cdot 10^{-2}$.

Esercizi

---

1. Si consideri $\mathbb{R}^3$ con norma N_∞ e siano:

   $$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 10^{-2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \delta x = 10^{-4} \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ -1 \end{bmatrix}$$

   Determinare la misura relativa del vettore scostamento ϵ_x e, per ogni k tale che $x_k \neq 0$, la misura relativa della componente k-esima dello scostamento.

2. Dimostrare che:

$$\epsilon_x < 1 \quad \Rightarrow \quad \hat{\epsilon}_x \leqslant \frac{\epsilon_x}{1-\epsilon_x}$$

3. Nell'esempio finale si è ottenuto:

$$\epsilon_x \leqslant \alpha_1 \approx 2.76 \cdot 10^{-2} \quad , \quad \hat{\epsilon}_x \leqslant \alpha_2 = 5.25 \cdot 10^{-2}$$

   (1) Dedurre dalla limitazione su $\hat{\epsilon}_x$ che:

$$\| \delta x \|_1 \leqslant \alpha_2$$

   (2) Utilizzare il risultato dell'Esercizio precedente per ottenere, dalla limitazione su ϵ_x, una limitazione su $\hat{\epsilon}_x$ e dedurne una nuova limitazione su $\| \delta x \|_1$.

   (3) Rappresentare su un piano cartesiano i vettori δx che verificano le limitazioni trovate in (1) e (2) e dedurne un insieme che certamente contiene l'effettivo vettore δx.

4. Determinare la soluzione del sistema dell'Esempio finale e controllare che le limitazioni trovate sono soddisfatte.

5. Siano $\hat{x}$ e r come nell'Esempio finale. Determinare:

$$M = -\frac{r\hat{x}^{\mathsf{T}}}{\hat{x}^{\mathsf{T}}\hat{x}}$$

   e verificare che $M\hat{x} = -r$. Posto poi:

$$\epsilon_A = \frac{\| M \|}{\| A \|}$$

   verificare che:

$$\alpha_3 = c(A)\, \epsilon_A < 1$$

   Dunque $A+M$ è invertibile e $\hat{x}$ è l'unica soluzione del sistema perturbato $(A+M)x = b$. Utilizzare il Teorema di condizionamento per ottenere una limitazione dell'errore relativo commesso approssimando x^* con $\hat{x}$ e confrontare la limitazione ottenuta con quelle dell'Esempio finale.