Lezione 21

In questa lezione si conclude lo studio delle *norme* di vettori e matrici e si inizia lo studio del *condizionamento* del problema del calcolo della soluzione di un sistema di equazioni lineari. Le parti di testo in magenta sono asserti *omessi in classe.*

- *Proprietà della norma indotta.*

  Sia N una norma in $\mathbb{R}^n$.

  - Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Allora: (i) Per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ si ha:

  $$N(Av) \leqslant \| A \|_N \, N(v)$$

  (ii) Esiste $v^* \in \mathbb{R}^n$ tale che:

  $$N(Av^*) = \| A \|_N \, N(v^*)$$

  (Entrambi gli asserti seguono immediatamente dalla definizione di norma di A indotta da N.)

  - Siano $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Allora:

  $$\| AB \|_N \leqslant \| A \|_N \| B \|_N$$

  (Sia $v^* \in \mathbb{R}^n$ con $N(v^*) = 1$ tale che $N(ABv^*) = \| AB \|_N$. Allora utilizzando due volte la proprietà precedente: $\| AB \|_N = N(ABv^*) \leqslant \| A \|_N \, N(Bv^*) \leqslant \| A \|_N \| B \|_N$.)

  - Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tale che $\| A \|_N = 0$. Allora $A = 0$.

  (Poiché $0 = \| A \|_N = \sup\{ N(Av)/N(v), v \neq 0 \}$ allora per ogni $v \neq 0$ si ha $N(Av) = 0$ ovvero $Av = 0$. Dunque: $A = 0$.)

- *Osservazione.*

  - L'insieme $\mathbb{R}^{n\times n}$ con le usuali definizioni di somma e multiplo è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Se N è una norma in $\mathbb{R}^n$ allora la funzione $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ definita da $f(A) = \| A \|_N$ è una norma in $\mathbb{R}^{n\times n}$.
  - Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^{n\times n}$ è *isomorfo* allo spazio vettoriale $\mathbb{R}^{n^2}$. La corrispondenza che realizza l'isomorfismo è quella che alla matrice A di colonne $a_1, \dots, a_n$ associa, prendendo a prestito la notazione da *Scilab*, il vettore $a = [a_1; \dots; a_n]$. Ciascuna delle funzioni $f_1, f_2, f_\infty : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ definite da:
    - $f_1(A) = N_1(a) = \Sigma_{i,j=1}^n | a_{ij} |$
    - $f_2(A) = N_2(a) = \sqrt{\Sigma_{i,j=1}^n | a_{ij} |^2}$ (detta anche *norma di Frobenius* di A)
    - $f_\infty(A) = N_\infty(a) = \max\{ | a_{ij} | \text{ con: } i, j = 1, \dots, n \}$

    è una *norma* in $\mathbb{R}^{n\times n}$.
  - Siano $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $v \in \mathbb{R}^n$. Si ha:

  $$\| Av \|_2 \leqslant f_2(A) \, \| v \|_2$$

  (Infatti, dette $r_1, \dots, r_n$ le righe di A ed omettendo il pedice alla norma due:

  $$\| Av \| = \sqrt{| r_1 v |^2 + \cdots + | r_n v |^2}$$

  Utilizzando la *disuguaglianza di Schwarz* si ha:

  $$\sqrt{| r_1 v |^2 + \cdots + | r_n v |^2} \leqslant \sqrt{\| r_1 \|^2 \| v \|^2 + \cdots + \| r_n \|^2 \| v \|^2}$$

  ed infine:

  $$\sqrt{\| r_1 \|^2 \| v \|^2 + \cdots + \| r_n \|^2 \| v \|^2} = \sqrt{(\| r_1 \|^2 + \cdots + \| r_n \|^2) \| v \|^2}$$

  da cui l'asserto.)

(D) Condizionamento

Siano $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matrice *invertibile*, $b \in \mathbb{R}^n$ e si consideri il sistema di equazioni lineari $Ax = b$. Il sistema ha una sola soluzione: l'unico vettore $x^* \in \mathbb{R}^n$ tale che $Ax^* = b$.

Nello studio del condizionamento del problema del calcolo della soluzione del sistema si considera la soluzione x^* come funzione dei *dati* A e b. Precisamente, introdotti *dati perturbati* $A' \approx A$ e $b' \approx b$, si considera la soluzione $\hat{x}$ del *sistema perturbato* $A'x = b'$ e ci si domanda quanto *grande* può essere la *variazione* $\delta x = \hat{x} - x^*$ rispetto alla *grandezza* delle *perturbazioni* $\delta A = A' - A$ e $\delta b = b' - b$.

Per mantenere esistenza ed unicità della soluzione per il sistema perturbato prenderemo in considerazione solo perturbazioni δA tali che:

$$A' = A + \delta A \ \textit{invertibile}$$

∗ *Osservazione.*

L'ipotesi è ragionevole perché nel condizionamento si considerano perturbazioni *piccole*. Se A è invertibile ed A' è sufficientemente vicino ad A, ovvero δA è sufficientemente piccola, anche $A' = A + \delta A$ è invertibile.

Lo studio del condizionamento necessita poi della *scelta* di misure di grandezza per variazioni e perturbazioni. Utilizzeremo a tale scopo le nozioni introdotte sulle norme. Precisamente, scelta una norma in $\mathbb{R}^n$, adottando misure *relative* e supponendo $b \neq 0$, definiamo per le perturbazioni:

$$\epsilon_A = \frac{\| \delta A \|}{\| A \|} \quad , \quad \epsilon_b = \frac{\| \delta b \|}{\| b \|}$$

e per la variazione della soluzione:

$$\epsilon_x = \frac{\| \delta x \|}{\| x^* \|}$$

Le quantità sono ben definite perché $\| A \| \neq 0$ per l'invertibilità di A, $\| b \| \neq 0$ per l'ipotesi $b \neq 0$ e $\| x^* \| \neq 0$ perché $b \neq 0$.

Studiamo due *casi particolari.*

- *Primo caso*: $\delta A = 0$, $\delta b \neq 0$.

  Per la variazione δx si ha:

  $$\delta x = \hat{x} - x^* = A^{-1}(b + \delta b) - A^{-1}b = A^{-1}\delta b$$

  da cui:

  $$\| \delta x \| = \| A^{-1}\delta b \| \leqslant \| A^{-1} \| \, \| \delta b \|$$

  Si osservi che per la prima delle Proprietà della norma indotta, *nell'ultima relazione sussiste l'uguaglianza per qualche δb.*

  In termini di misura relativa della variazione:

  $$\epsilon_x = \frac{\| \delta x \|}{\| x^* \|} \leqslant \frac{\| A^{-1} \| \, \| \delta b \|}{\| x^* \|}$$

  Ricordando che x^* è la soluzione del sistema $Ax = b$ si ottiene:

  $$\| b \| = \| Ax^* \| \leqslant \| A \| \, \| x^* \|$$

  Si osservi che anche in questo caso *nell'ultima relazione sussiste l'uguaglianza* per qualche $x^* \neq 0$, ovvero *per qualche* $b \neq 0$. Riscritta l'ultima disuguaglianza nella forma:

  $$\frac{1}{\| x^* \|} \leqslant \frac{\| A \|}{\| b \|}$$

  si ottiene infine:

  $$\epsilon_x \leqslant \| A^{-1} \| \, \| A \| \, \frac{\| \delta b \|}{\| b \|}$$

– *Definizione* (numero di condizionamento).
Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertibile. Si chiama *numero di condizionamento* di A la quantità:

$$c(A) = \| A \| \, \| A^{-1} \|$$

Con le notazioni introdotte si riscrive il risultato ottenuto nella forma:

– *Teorema* (di condizionamento, I).
Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertibile. Allora: per ogni vettore non nullo $b \in \mathbb{R}^n$ ed ogni $\delta b \in \mathbb{R}^n$ si ha:

$$\epsilon_x \leqslant c(A)\, \epsilon_b$$

e nella relazione sussiste l'uguaglianza per qualche $b \neq 0$ e qualche δb.

Esercizi

---

1. Dimostrare che la funzione f definita nell'Osservazione verifica la definizione di norma.

2. Si considerino le funzioni f_1 e f_2 definite nell'Osservazione. Calcolare $f_1(I)$ e $f_2(I)$ e dedurre dal risultato che f_1 e f_2 sono norme *non indotte*.

3. Si consideri la funzione f_∞ definita nell'Osservazione e siano:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcolare $f_\infty(A), f_\infty(B)$ e $f_\infty(AB)$. Dedurre dal risultato che f_∞ è una norma *non indotta*.

4. Sia:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinare $\| A \|_\infty$ e $v^* \in \mathbb{R}^3$ tale che $N_\infty(v^*) = 1$ e $N_\infty(Av^*) = \| A \|_\infty$.

5. Si consideri $\mathbb{R}^2$ con norma N_1 e sia:

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Disegnare su un piano cartesiano l'insieme di tutti i vettori b' ottenuti sommando a b le perturbazioni δb tali che $\epsilon_b = \frac{1}{10}$.