Lezione 20

Nella prima parte di questa lezione si mostra, in un esempio, come utilizzare la procedura EGP per affrontare alcuni problemi di algebra lineare. Nella seconda parte, come premessa allo studio del *condizionamento* del problema del calcolo della soluzione di un sistema di equazioni lineari, si inizia lo studio delle *norme* di vettori e matrici. Le parti di testo in magenta sono dimostrazioni di asserti *omesse in classe.*

Prima parte

- *Esempio* (uso della procedura EGP).

  Sia: $\mathrm{EGP}(A) = (P, S, D)$ con:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

  e:

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  (1) Calcolare $\det A$ e risolvere il sistema $Ax = b$;

  (2) Calcolare A^{-1};

  (3) Determinare A e verificare il risultato dell'applicazione di EGP.

- *Soluzione.*

  (1) Si ha:

$$\det A = \det(P^{-1}SD) = \det P^{\mathsf{T}} \det S \det D = (-1) \cdot 1 \cdot (-2) = 2$$

  La matrice A è invertibile e il procedimento introdotto la lezione scorsa determina *la* soluzione del sistema come segue: (i) Si calcola la soluzione del sistema $Sx = Pb$ con la procedura SA:

$$c = \mathrm{SA}(S, Pb) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

  e poi (ii) Si calcola la soluzione x^* del sistema $Ax = b$ risolvendo con la procedura SI il sistema $Dx = c$:

$$x^* = \mathrm{SI}(D, c) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

  (2) Si ha:

$$A = P^{-1}SD \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = D^{-1}S^{-1}P$$

  Per calcolare l'inversa di D si osserva che, per definizione, è *la* matrice X di colonne x_1, x_2, x_3 tale che:

$$DX = I \quad \text{ovvero} \quad (Dx_1, Dx_2, Dx_3) = (e_1, e_2, e_3)$$

  Le colonne dell'inversa si trovano risolvendo, con la procedura SI, i sistemi: $Dx_k = e_k, k = 1, 2, 3$. Si ottiene:

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

  Analogamente, le colonne dell'inversa di S si trovano risolvendo, con la procedura SA, i sistemi: $Sx_k = e_k, k = 1, 2, 3$. Si ottiene:

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Infine:

$$A^{-1} = D^{-1}S^{-1}P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(3) Si determina A calcolando il prodotto $P^{\mathsf{T}}SD$ e poi al risultato si applica la procedura EGP.

Seconda parte

Si ricordi che se v è un elemento di $\mathbb{R}^n$ di componenti $v_1, \ldots, v_n$, la *norma* di v, che si indica con $\| v \|$, è:

$$\| v \| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}$$

La funzione così definita estende a $v \in \mathbb{R}^n$ la nozione geometrica di *lunghezza del segmento orientato che rappresenta* v del caso $v \in \mathbb{R}^2$ o $v \in \mathbb{R}^3$. In generale si ha:

- *Definizione* (norma, spazio normato).

  Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Una funzione $N : V \to \mathbb{R}$ si dice *norma* in V se ha le tre proprietà seguenti:

  (1) Per ogni $v \in V$: $N(v) \geqslant 0$ e $N(v) = 0 \Rightarrow v = 0$
  (2) Per ogni $v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$: $N(\alpha v) = |\,\alpha\,|\, N(v)$
  (3) Per ogni $v, w \in V$: $N(v + w) \leqslant N(v) + N(w)$ (disuguaglianza triangolare)

  La coppia (V, N) si chiama *spazio normato*.

  – *Esempi*

    * Sia $V = \mathbb{R}^2$. La funzione che a v associa *la lunghezza del segmento orientato che rappresenta* v verifica le proprietà richieste dalla definizione.
    * Sia $V = \mathbb{R}^n$. Le funzioni $N_1, N_2, N_\infty : V \to \mathbb{R}$ definite da:

$$N_1(v) = |\, v_1 \,| + \cdots + |\, v_n \,| \equiv \| v \|_1$$
$$N_2(v) = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2} \equiv \| v \|_2$$
$$N_\infty(v) = \max\{\, |\, v_1 \,|, \ldots, |\, v_n \,|\,\} \equiv \| v \|_\infty$$

      verificano la definizione.
    * Sia:

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

      Allora:

$$\| v \|_1 = 2 \quad , \quad \| v \|_2 = \sqrt{2} \quad , \quad \| v \|_\infty = 1$$

- *Definizione* (intorno sferico).

  Siano N una norma in $\mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$ e r un numero reale non negativo. Si chiama *intorno sferico* di *centro* v e *raggio* r l'insieme:

$$I(v, r) = \{\, x \in \mathbb{R}^n : N(x - v) \leqslant r \,\}$$

  – *Esercizio.*

    Disegnare l'intorno sferico di centro $v = 0 \in \mathbb{R}^2$ e raggio $r = 1$ nei casi $N = N_2, N_1$ e N_∞.

- *Definizione* (norma di matrice).

  Siano N una norma in $\mathbb{R}^n$ e $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. La *norma di A indotta da N* è:

$$\| A \|_N = \sup \left\{ \frac{N(Av)}{N(v)}, v \neq 0 \right\}$$

– *Esempio*: In $\mathbb{R}^n$ con norma N si ha: $\| I \|_N = 1, \| 0_{n\times n} \| = 0$.

Per ogni $v \neq 0$ si ha:
$$\frac{N(Av)}{N(v)} = N\left(\frac{Av}{N(v)}\right) = N\left(A\,\frac{v}{N(v)}\right)$$
e quindi:
$$\left\{\,\frac{N(Av)}{N(v)}, v \neq 0\,\right\} = \{\, N(Av), N(v) = 1\,\}$$
L'insieme B dei vettori v tali che $N(v) = 1$ è *chiuso e limitato* e la funzione $F : B \to \mathbb{R}$ definita da $F(v) = N(Av)$ è *continua*. Allora, per il Teorema di Weierstrass, F ha *massimo* e *minimo*, ovvero: esistono v_* e v^* tali che:

$$N(Av_*) = \min\{\, N(Av), N(v) = 1\,\} \quad \text{e} \quad N(Av^*) = \max\{\, N(Av), N(v) = 1\,\} = \| A \|_N$$

Inoltre, se A è invertibile si ha:

$$\| A^{-1} \|_N = (\min\{\, N(Av), N(v) = 1\,\})^{-1}$$

Infatti:
$$\| A^{-1} \| = \sup\left\{\,\frac{N(A^{-1}v)}{N(v)}, v \neq 0\,\right\}$$
ovvero, posto $w = A^{-1}v$ e osservato che essendo A^{-1} invertibile si ha $v \neq 0 \Leftrightarrow w \neq 0$:

$$\| A^{-1} \| = \sup\left\{\,\frac{N(w)}{N(Aw)}, w \neq 0\,\right\}$$

Adesso si osservi che se $\Omega \subset \mathbb{R}$ si ha:

$$\sup \Omega = (\,\inf\{\, 1/x, x \in \Omega\,\}\,)^{-1}$$

dunque:
$$\| A^{-1} \| = \left(\inf\left\{\,\frac{N(Aw)}{N(w)}, w \neq 0\,\right\}\right)^{-1}$$

Il *calcolo* di $\| A \|$ per N generica è proibitivo. Nei *casi particolari* $N = N_1, N_2$ e N_∞ si ha, dette $a_1, \ldots, a_n$ le colonne di A:

$$\| A \|_1 = \max\{\, N_1(a_1), \ldots, N_1(a_n)\,\}$$
$$\| A \|_2 = \sqrt{\max\{\,\text{autovalori di } A^\mathsf{T} A\,\}}$$
$$\| A \|_\infty = \| A^\mathsf{T} \|_1$$

Esercizi

---

1. Sia $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ una matrice *triangolare superiore* (rispettivamente: *triangolare inferiore*) invertibile. Determinare le colonne di A^{-1} risolvendo i sistemi $Ax_k = e_k$ con la procedura SI (rispettivamente: SA) e constatare che A^{-1} è a sua volta triangolare superiore (rispettivamente: inferiore). Cosa accade se A è triangolare inferiore *con uno sulla diagonale*?

2. Sia A la matrice dell'*Esempio* iniziale della lezione. Al primo passo della procedura EGP applicata ad A è necessario scegliere se scambiare la prima riga con la seconda o con la terza. Constatare che le due scelte portano a valori *diversi* delle matrici prodotte da EGP.

3. Dimostrare che le funzioni N_1 e N_∞ da $\mathbb{R}^n$ a valori in $\mathbb{R}$ verificano la definizione di norma.