Lezione 19

In questa lezione si descrive l'insieme di definizione della procedura EGP ed il procedimento di ricerca della soluzione di un sistema di equazioni lineari che utilizza tale procedura. Nell'esercitazione si utilizza il procedimento per realizzare un piccolo *simulatore* di reti elettriche. Le parti di testo in magenta sono dimostrazioni di asserti *omesse in classe.*

- *Teorema* (insieme di definizione della procedura EGP).

  Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ di colonne $a_1, \dots, a_n$.

  La procedura EGP è definita in A (ovvero termina correttamente quando applicata ad A) *se e solo se* le colonne $a_1, \dots, a_{n-1}$ sono linearmente indipendenti.

  (*Dimostrazione*:

  La condizione è necessaria. Dette S, D, P le matrici generate dalla procedura EGP applicata ad A si ha: $A = P^{-1}SD$, P ed S sono invertibili e, essendo $d_{11} \neq 0, \dots, d_{n-1,n-1} \neq 0$, le prime $n-1$ colonne di D sono linearmente indipendenti. Allora sono linearmente indipendenti anche le prime $n-1$ colonne di A.

  La condizione è sufficiente. Per assurdo: Se EGP applicata ad A termina prematuramente allora per $k \leqslant n$ si ha $b^{(k-1)}_{j,k-1} = 0$ per ogni $j \geqslant k-1$ e quindi le prime $k-1$ colonne di $B^{(k-1)}$ sono linearmente dipendenti. Ma

  $$B^{(k-1)} = H_{k-2}P_{k-2} \cdots H_1 P_1 A$$

  e quindi, essendo le matrici di permutazione e quelle elementari di Gauss invertibili, devono essere linearmente dipendenti le prime $k-1$ colonne della matrice A.)

  Si osservi che l'invertibilità di A è condizione sufficiente ma *non necessaria* per la corretta terminazione della procedura EGP – si riguardi l'Esempio della lezione precedente.

La procedura EGP è il passo iniziale del procedimento per lo studio di un sistema di equazioni lineari. Siano $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ e si consideri il sistema $Ax = b$. Per verificare l'invertibilità di A e cercare la soluzione del sistema si utilizza il procedimento seguente:

(1) Si applica EGP ad A;

(2) *Se* la procedura termina prematuramente *allora* il procedimento si arresta *altrimenti*, dette S, D, P le matrici generate dalla procedura:

  (2a) Si determina la soluzione c del sistema $Sx = Pb$ utilizzando la procedura di sostituzione in avanti;

  (2b) *Se* $d_{nn} = 0$ *allora* il procedimento si arresta *altrimenti* si determina la soluzione x^* del sistema $Dx = c$ utilizzando la procedura di sostituzione all'indietro.

Il procedimento è *soddisfacente*: *Se* A non è invertibile *allora* la procedura EGP termina prematuramente oppure $d_{nn} = 0$, *altrimenti* il vettore finale x^* è la soluzione del sistema dato.

Esercizi

---

1. Siano:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   Utilizzando le matrici ottenute nell'Esempio della lezione precedente, applicare il procedimento descritto sopra per lo studio del sistema di equazioni lineari $Ax = b$.