Lezione 18

In questa lezione si descrive la procedura di ricerca di una fattorizzazione LR di un'assegnata matrice.

- *Procedura EGP.*

  A partire da un'assegnata matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, la procedura costruisce una *sequenza finita* di matrici $A^{(k)} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Se la procedura termina correttamente, la sequenza ha *lunghezza* n e $A^{(n)}$ è una *matrice triangolare superiore.*

  La procedura opera come segue: posto $A^{(1)} = A$, per $k = 2, \dots, n$ determina opportunamente, *se possibile*, matrici $P_{k-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ di permutazione e $H_{k-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ elementare di Gauss e pone:

  $$A^{(k)} = H_{k-1}P_{k-1}A^{(k-1)}$$

  Se la procedura termina correttamente, posto $D = A^{(n)}$ si ha:

  $$D = H_{n-1}P_{n-1}\cdots H_1P_1\, A$$

  da cui, essendo ciascuno dei fattori P_k e H_k *invertibile*:

  $$A = P_1^{-1}H_1^{-1}\cdots P_{n-1}^{-1}H_{n-1}^{-1}\, D$$

  Come vedremo, la matrice:

  $$\Sigma = P_1^{-1}H_1^{-1}\cdots P_{n-1}^{-1}H_{n-1}^{-1}$$

  non è, in generale, triangolare inferiore e quindi la coppia (Σ, D) non è una fattorizzazione LR di A. Peró, posto $P = P_{n-1}\cdots P_1$ la matrice:

  $$S = P\Sigma$$

  è triangolare inferiore con uno sulla diagonale. Dunque: *se termina correttamente, la procedura costruisce una* terna *di matrici S, D, P tali che: la coppia (S, D) è una fattorizzazione LR della matrice PA.*

Resta da discutere: (i) la determinazione delle matrici di permutazione P_k ed elementari di Gauss H_k e (ii) come mai Σ non è triangolare inferiore e $P\Sigma$ è triangolare inferiore con uno sulla diagonale. Illustreremo questi punti descrivendo dettagliatamente il comportamento della procedura su un esempio.

- *Esempio*

  Sia:

  $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

  La procedura opera così:

  - Pone $A^{(1)} = A$;
  - Pone $k = 2$.
    * Constata che $a_{11}^{(1)} \neq 0$ e pone di conseguenza: $P_1 = I$ e

  $$B^{(1)} = P_1A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

* Considera la matrice elementare di Gauss:

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{21} & 1 & 0 & 0 \\ \lambda_{31} & 0 & 1 & 0 \\ \lambda_{41} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  e cerca valori di $\lambda_{21}, \lambda_{31}$ e λ_{41} tali che gli elementi di posto $(2,1)$, $(3,1)$ e $(4,1)$ della matrice $H_1 B^{(1)}$ siano *zero*. Le tre condizioni equivalgono alle equazioni:

$$\lambda_{j1}\, b_{11}^{(1)} + b_{j1}^{(1)} = 0 \quad \text{per } j = 2,3,4$$

  Poiché $b_{11}^{(1)} \neq 0$ le equazioni determinano, ciascuna, *un solo valore* di λ_{j1}:

$$\lambda_{21} = -\frac{b_{21}^{(1)}}{b_{11}^{(1)}} = -2 \quad , \quad \lambda_{31} = -\frac{b_{31}^{(1)}}{b_{11}^{(1)}} = 2 \quad , \quad \lambda_{41} = -\frac{b_{41}^{(1)}}{b_{11}^{(1)}} = 1$$

* Con i valori trovati costruisce:

$$A^{(2)} = H_1 B^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

  Si osservi che la prima riga di $A^{(2)}$ è copia della prima riga di $B^{(1)}$.

- Pone $k = 3$.
  * Constata che $a_{22}^{(2)} = 0$ e cerca $j > 2$ tale che $a_{j2}^{(2)} \neq 0$. Constatato che $a_{32}^{(2)} \neq 0$, indicata con P_{23} la matrice di permutazione che *scambia le righe* 2 *e* 3, pone di conseguenza: $P_2 = P_{23}$ e

$$B^{(2)} = P_2 A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

  * Considera la matrice elementare di Gauss:

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{32} & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_{42} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  e cerca valori di λ_{32} e λ_{42} tali che gli elementi di posto $(3,2)$ e $(4,2)$ della matrice $H_2 B^{(2)}$ siano *zero*. Le due condizioni equivalgono alle equazioni:

$$\lambda_{j2}\, b_{22}^{(2)} + b_{j2}^{(2)} = 0 \quad \text{per } j = 3,4$$

  Poiché $b_{22}^{(2)} \neq 0$ le equazioni determinano, ciascuna, *un solo valore* di λ_{j2}:

$$\lambda_{32} = -\frac{b_{32}^{(2)}}{b_{22}^{(2)}} = 0 \quad , \quad \lambda_{42} = -\frac{b_{42}^{(2)}}{b_{22}^{(2)}} = -1$$

  * Con i valori trovati costruisce:

$$A^{(3)} = H_2 B^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

  Si noti che la scelta di H_2 *mantiene* i tre zeri ottenuti al passo precedente e le prime *due* righe di $A^{(3)}$ sono copia delle prime due righe di $B^{(2)}$.

- Pone $k = 4$.
  - Constata che $a_{33}^{(3)} \neq 0$ e pone di conseguenza: $P_3 = I$ e

$$B^{(3)} = P_3 A^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

  - Considera la matrice elementare di Gauss:

$$H_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{43} & 1 \end{bmatrix}$$

  e cerca valori di λ_{43} tali che gli elementi di posto $(4,3)$ della matrice $H_3 B^{(3)}$ siano *zero*. La condizione equivale all'equazione:

$$\lambda_{43}\, b_{33}^{(3)} + b_{43}^{(3)} = 0$$

  Poiché $b_{33}^{(3)} \neq 0$ l'equazione determina *un solo valore* di λ_{43}:

$$\lambda_{43} = -\frac{b_{43}^{(3)}}{b_{33}^{(3)}} = 0$$

  - Con il valore trovato costruisce:

$$A^{(4)} = H_3 B^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = D$$

  Si noti che la scelta di H_3 *mantiene* i gli zeri ottenuti ai passi precedenti e le prime *tre* righe di $A^{(4)}$ sono copia delle prime tre righe di $B^{(3)}$.

I valori $b_{11}^{(1)}, b_{22}^{(2)}$ e $b_{33}^{(3)}$ che la procedura utilizza come *divisori* per determinare i vari elementi λ_{ij}, e che *ritroviamo sulla diagonale della matrice finale* D, si chiamano *pivot*.

Come preannunciato, la matrice $\Sigma = H_1^{-1} P_2^{-1} H_2^{-1} H_3^{-1}$ *non è* triangolare inferiore:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ma, posto $P = P_2$ si ha invece:

$$P\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

che *è* triangolare inferiore con uno sulla diagonale. Per capire come ciò accada si osservi che:

$$P\Sigma = P_2 H_1^{-1} P_2^{-1} H_2^{-1} H_3^{-1}$$

e che:

$$P_2 H_1^{-1} P_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv H_1^{-1}(2)$$

è triangolare inferiore con uno sulla diagonale. La matrice $H_1^{-1}(2)$ è *il risultato dell'azione della permutazione* P_2 *sulle righe e colonne di* H_1^{-1}.

In generale, se:

$$P = P_3P_2P_1 \quad \text{e} \quad \Sigma = P_1^{-1}H_1^{-1}P_2^{-1}H_2^{-1}P_3^{-1}H_3^{-1}$$

allora:

$$P\Sigma = P_3P_2P_1P_1^{-1}H_1^{-1}P_2^{-1}H_2^{-1}P_3^{-1}H_3^{-1} = P_3\big(P_2H_1^{-1}P_2^{-1}\big)H_2^{-1}P_3^{-1}H_3^{-1}$$

e, con la notazione introdotta sopra:

$$P\Sigma = P_3H_1^{-1}(2)H_2^{-1}P_3^{-1}H_3^{-1}$$

Adesso, ricordando che $P_3^{-1}P_3 = I$, si riscrive:

$$P\Sigma = P_3H_1^{-1}(2)P_3^{-1}P_3H_2^{-1}P_3^{-1}H_3^{-1} = H_1^{-1}(2,3)H_2^{-1}(3)H_3^{-1}$$

Le matrici $H_1^{-1}(2,3)$, $H_2^{-1}(3)$ e H_3^{-1} sono triangolari inferiori con uno sulla diagonale e tale è il loro prodotto.

- *Osservazione.*

  Se per $k < n$ si ha: $b_{j,k-1}^{(k-1)} = 0$ per ogni $j \geqslant k-1$, la procedura *EGP* arresta la costruzione della sequenza. La condizione: $k < n$ e $b_{j,k-1}^{(k-1)} = 0$ per ogni $j \geqslant k-1$ implica che la matrice A è *non invertibile*. Infatti: $b_{j,k-1}^{(k-1)} = 0$ per ogni $j \geqslant k-1$ implica che la matrice $B^{(k-1)}$ è non invertibile, ma:

  $$B^{(k-1)} = H_{k-2}P_{k-2}\cdots H_1P_1A$$

  e quindi, essendo le matrici di permutazione e quelle elementari di Gauss *invertibili*, *deve* essere non invertibile la matrice A. In sostanza:

  Se la procedura EGP applicata ad A non termina correttamente, allora A è non invertibile.

Esercizi

---

1. Siano $A, B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ matrici triangolari inferiori con uno sulla diagonale. Costruire il prodotto AB *per righe* e verificare che a sua volta è una matrice triangolare inferiore con uno sulla diagonale.

2. Siano $A, B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ matrici triangolari superiori. Costruire il prodotto AB *per colonne* e verificare che a sua volta è una matrice triangolare superiore.

3. Siano:

   $$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{21} & 1 & 0 & 0 \\ \lambda_{31} & 0 & 1 & 0 \\ \lambda_{41} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   e $P_2 = P_{24}, P_3 = P_{34}$. Calcolare $H_1^{-1}(2,3)$ e constatare che è triangolare inferiore con uno sulla diagonale.