Lezione 17

In questa lezione si enuncia il problema della ricerca di soluzioni di *sistemi di equazioni lineari*, si introducono e discutono i *casi semplici* e si descrive l'idea adottata per affrontarlo in generale.

2 Sistemi di equazioni lineari

- *Problema.*

  Dati $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrice *invertibile* e $b \in \mathbb{R}^n$, determinare *la soluzione* del sistema di equazioni $Ax = b$, ovvero l'unico elemento $x^* \in \mathbb{R}^n$ tale che $Ax^* = b$.

Si ricordi che: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *invertibile* significa che *esiste* $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *tale che*: $AB = BA = I$, con $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrice identità di colonne $e_1, \ldots, e_n$. Proprietà *equivalenti* all'invertibilità di A sono:

* $\det A \neq 0$;
* $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$, ovvero $\ker A = \{\, 0 \,\}$;
* Le colonne (righe) di A sono elementi linearmente indipendenti, dunque una *base*, di $\mathbb{R}^n$;
* *Per ogni* $b \in \mathbb{R}^n$ il sistema di equazioni $Ax = b$ ha *una sola soluzione*.

(A) Casi semplici

Se M è una matrice $n \times n$ e v una colonna di n numeri, indichiamo con m_{ij} e v_i $(i, j = 1, \ldots, n)$ gli elementi di M e quelli di v.

(D) A *diagonale*, ovvero: $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$.

  - *Invertibile* se e solo se $a_{kk} \neq 0, k = 1, \ldots, n$;
  - *Soluzione*: $x^*_k = b_k/a_{kk}, k = 1, \ldots, n$.

  Il numero di operazioni aritmetiche richiesto dal calcolo di x^* è: nD (n divisioni).

(T) A *triangolare*, ovvero: $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$ (t. *superiore*) o $i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$ (t. *inferiore*).

  - *Invertibile* se e solo se $a_{kk} \neq 0, k = 1, \ldots, n$;
  - *Soluzione*: Nel caso triangolare superiore la soluzione si calcola con la procedura di *sostituzione all'indietro*:
    - $x = SI(T, c)$

      // T matrice $n \times n$ triangolare superiore invertibile, c colonna di n numeri reali;
      // x verifica la relazione: $Tx = c$.
      $x_n = c_n/t_{nn}$;
      `per` $k = n - 1, \ldots, 1$ `ripeti`:
      $\quad s_k = c_k - (t_{k,k+1}x_{k+1} + \cdots + t_{kn}x_n)$;
      $\quad x_k = s_k/t_{kk}$

    Nel caso triangolare inferiore la soluzione si calcola con l'analoga procedura di *sostituzione in avanti*.

  Il numero di operazioni aritmetiche richiesto dal calcolo di x^* è: $nD + \frac{1}{2}\, n(n-1)\,(P + S)$.

(O) A matrice *ortogonale*, ovvero che verifica una delle tre proprietà equivalenti:

  * Le colonne (righe) di A sono una *base ortonormale* di $\mathbb{R}^n$ rispetto al prodotto scalare canonico ($a \cdot b = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n = b^{\mathsf{T}}a$);
  * $A^{\mathsf{T}}A = I$;
  * A è invertibile e $A^{-1} = A^{\mathsf{T}}$.

– *Invertibile* certamente;
– *Soluzione*: il sistema $Ax = b$ è equivalente ai sistema $A^\mathsf{T}Ax = A^\mathsf{T}b$, a sua volta equivalente a: $x = A^\mathsf{T}b = x^*$.

Il numero di operazioni aritmetiche richiesto dal calcolo di x^* è quello richiesto dal prodotto di una matrice $n \times n$ per una colonna di n componenti: $n^2P + n(n-1)S$.

(P) A matrice *di permutazione*, ovvero le cui colonne (righe) sono *una permutazione* di quelle della matrice identità. Si osservi che, se A è una matrice di permutazione allora:

∗ Le colonne (righe) di A sono una *base ortonormale* di $\mathbb{R}^n$ rispetto al prodotto scalare canonico, dunque: *le matrici di permutazione sono particolari matrici ortogonali*;
∗ Se $v \in \mathbb{R}^n$ allora le componenti di Av si ottengono *permutando* quelle di v come indicato da A;
∗ Anche A^T è di permutazione.

– *Invertibile* certamente;
– *Soluzione*: il sistema $Ax = b$ è equivalente ai sistema $A^\mathsf{T}Ax = A^\mathsf{T}b$, a sua volta equivalente a: $x = A^\mathsf{T}b = x^*$.

Il numero di operazioni aritmetiche richiesto dal calcolo di x^* è quello richiesto dal prodotto di una matrice $n \times n$ *di permutazione* per una colonna di n componenti: *zero*.

(B) Caso generale

Sia A una matrice *non* diagonale, triangolare, ortogonale o di permutazione. L'idea che seguiremo per verificare se A è invertibile ed eventualemnte calcolare la soluzione del sistema $Ax = b$ è:

- *Passo 1*:

  Fattorizzare A (scrivere A come prodotto di) *fattori semplici*, ovvero ciascuno appartenente ad una delle categorie D, T, O, P. Ottenuta la fattorizzazione, l'invertibilità di A si riduce all'invertibilità (facilmente verificabile!) di ciascuno dei fattori.

- *Passo 2*:

  Siano, ad esempio, F_1, F_2 e F_3 i fattori, ciascuno invertibile, ottenuti nel Passo 1. Allora:

  $$A = F_1F_2F_3 \quad \text{e} \quad x^* = F_3^{-1}F_2^{-1}F_1^{-1}b$$

  Per determinare x^* si calcolano:

  (1) $c_1 = F_1^{-1}b =$ la soluzione del sistema $F_1x = b$;
  (2) $c_2 = F_2^{-1}c_1 =$ la soluzione del sistema $F_2x = c_1$;
  (3) $c_3 = F_3^{-1}c_2 =$ la soluzione del sistema $F_3x = c_2$.

  Si ha infatti: $c_3 = F_3^{-1}F_2^{-1}F_1^{-1}b = x^*$. Dunque, per determinare la soluzione del sistema $Ax = b$ si risolvono tanti *sistemi semplici* quanti sono i fattori di A ottenuti nel Passo 1.

Nel seguito considereremo *due* tipi di fattorizzazione e loro varianti:

(LR) Una fattorizzazione LR di $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è *una coppia* di matrici $S, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tali che:

∗ Il fattore sinistro S è *triangolare inferiore con* $s_{kk} = 1, k = 1, \dots, n$;
∗ Il fattore destro D è *triangolare superiore*;
∗ $SD = A$

Si osservi che il fattore sinistro S è invertibile, dunque: *A è invertibile se e solo se lo è il fattore destro D.*

(QR) Una fattorizzazione QR di $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è *una coppia* di matrici $U, T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tali che:

∗ Il fattore sinistro U è *ortogonale*;

* $*$ Il fattore destro T è *triangolare superiore*;
* $*$ $UT = A$

Si osservi che anche in questo caso il fattore sinistro U è invertibile, dunque: *A è invertibile se e solo se lo è il fattore destro T.*

Resta da chiarire *come cercare* fattorizzazioni LR o QR di A. Come vedremo, la ricerca di una fattorizzazione LR si effettua rileggendo opportunamente la procedura di *eliminazione di Gauss*; la ricerca di una fattorizzazione QR, invece, si effettua rileggendo opportunamente la procedura di *ortonormalizzazione di Gram-Schmidt.*

(C) Ricerca di fattorizzazioni LR

Una matrice $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ si chiama *matrice elementare di Gauss* se è ottenuta dalla matrice identità scegliendo un indice j in $1, \ldots, n-1$, numeri reali $\lambda_{j+1,j}, \ldots, \lambda_{nj}$ e operando la sostituzione:

$$e_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \longleftarrow \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \lambda_{j+1,j} \\ \vdots \\ \lambda_{nj} \end{bmatrix}$$

Si osservi che una matrice elementare di Gauss è dunque una particalare matrice *triangolare inferiore con uno sulla diagonale*, dunque *invertibile.*

- *Esempio*

  Siano λ_{21} e λ_{31} numeri reali. La matrice:

  $$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda_{21} & 1 & 0 \\ \lambda_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  —'e elementare di Gauss. Sia poi:

  $$A = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

  Allora:

  $$HA = \begin{bmatrix} r_1 \\ \lambda_{21}r_1 + r_2 \\ \lambda_{31}r_1 + r_3 \end{bmatrix}$$

  Inoltre, si verifica che:

  $$H^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\lambda_{21} & 1 & 0 \\ -\lambda_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizi

---

1. Descrivere la procedura di *sostituzione in avanti* di intestazione:

   $$x = SA\,(T, c)$$

   che determina, dati una matrice $n \times n$ triangolare *inferiore* invertibile e una colonna c di n numeri reali, la colonna x che verifica: $Tx = c$. Determinare anche il numero di operazioni aritmetiche richiesto dal calcolo di $x = SA\,(T, c)$.

2. Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Verificare che: Le colonne di A sono una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ rispetto al prodotto scalare canonico *se e solo se* $A^\top A = I$.

3. Sia:
$$v = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$
Determinare la matrice di permutazione $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tale che:
$$Pv = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

4. Siano:
$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{21} & 1 & 0 & 0 \\ \lambda_{31} & 0 & 1 & 0 \\ \lambda_{41} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{32} & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_{42} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
Costruire $H_1 H_2$ *per colonne* e verificare che il numero di operazioni aritmetiche richiesto dal calcolo è *zero*.