Lezione 16

In questa lezione si conclude l'argomento *Zeri di funzione* trattando, teoricamente e sperimentalmente, il *condizionamento* del problema.

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Quando si utilizza il metodo di bisezione con il calcolatore, per approssimare uno zero di f, l'utilizzatore deve *scegliere un algoritmo* con cui approssimare i valori di f. Lo scopo dell'esercitazione è quello di mostrare come la scelta dell'algoritmo influenzi i risultati ottenuti.

Nell'esercitazione si ha $f(x) = (x-2)^{13}$ e si propongono due algoritmi, `F` e `G`, per approssimarne i valori. Mentre il primo algoritmo proposto ha origine evidente, il secondo necessita di una premessa. Se, come nel caso in esame, f è una *funzione polinomiale*, dato $x \in \mathbb{R}$ il valore $f(x)$ può essere calcolato con la procedura seguente, nota come *metodo di Horner*:

- $z = \mathit{Horner}(p, t)$

  // $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione polinomiale definita da:

  $$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \quad , \quad a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$$

  // t numero reale;

  $v_n = a_n$;

  `per` $k = n-1, \ldots, 0$ `ripeti`:

      $v_k = a_k + v_{k+1} t$;

  $z = v_0$

Sia, ad esempio, $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$. Dato $t \in \mathbb{R}$, l'assegnamento:

$$z = \mathit{Horner}(p, t)$$

calcola:

$$\begin{aligned}
&v_4 = a_4 \\
&v_3 = a_3 + v_4 t = a_3 + a_4 t \\
&v_2 = a_2 + v_3 t = a_2 + a_3 t + a_4 t^2 \\
&v_1 = a_1 + v_2 t = a_1 + a_2 t + a_3 t^2 + a_4 t^3 \\
&v_0 = a_0 + v_1 t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 = p(t)
\end{aligned}$$

e restituisce $z = v_0 = p(t)$.

Il metodo è interessante per il basso numero di operazioni aritmetiche richiesto. Precisamente, per $k = n-1, \ldots, 0$ il calcolo di v_k richiede $1P + 1S$ (un prodotto ed una somma). In totale:

$$\text{numero di operazioni richieste da } \mathit{Horner}(p, t) : nP + nS$$

Altri metodi *più evidenti* per calcolare il valore $p(t)$ richiedono un maggior numero di operazioni (vedere l'Esercizio 1).

(E) Condizionamento del calcolo di uno zero di una funzione

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua ed α uno zero isolato di f. Siano poi $[a, b]$ un intervallo che separa α e $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua *vicina* ad f, ovvero tale che:

$$\text{per ogni } x \in [a, b] \text{ si ha: } |\, g(x) - f(x)\,| \leqslant \epsilon, \text{ con } \epsilon > 0 \text{ “piccolo”}$$

Lo studio del *condizionamento* del calcolo di α consiste nel determinare quanto lontano da α può essere uno zero di g rispetto ad ϵ.

In termini grafici, la relazione tra f e g si rilegge:

$$\text{per ogni } x \in [a, b] \text{ si ha: } f(x) - \epsilon \leqslant g(x) \leqslant f(x) + \epsilon$$

dunque *il grafico di g giace nella parte di piano compresa tra il grafico di $f(x) - \epsilon$ ed il grafico di $f(x) + \epsilon$.*

Consideriamo alcuni casi in cui f è *regolare*.

- Siano $f'(\alpha) \neq 0$, $[a, b]$ un intorno di α in cui sia ragionevole l'approssimazione:

$$f(x) \approx f'(\alpha)(x - \alpha)$$

e ϵ tale che $|\,f(a)\,|, |\,f(b)\,| > \epsilon$. In queste ipotesi g ha certamente qualche zero in $[a, b]$. Si consideri, ad esempio, la situazione rappresentata a sinistra in Figura 1, in cui è riportato a tratteggio nero il grafico di $f(x)$, in rosso quello di $f(x) + \epsilon$ e in blu quello di $f(x) - \epsilon$. Come graficamente evidente, il più piccolo intervallo che certamente contiene gli zeri di g è quello di estremi le intersezioni con l'asse delle ascisse delle curve rossa e blu. Dunque:

nel peggiore dei casi g ha uno zero che dista da α circa: $k\,\epsilon$ con $k = 1/|\,f'(\alpha)\,|$

Lo scostamento è propozionale ad ϵ ed il condizionamento è *tanto peggiore* quanto più $f'(\alpha)$ è *vicino a zero*:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left| \frac{\text{scostamento}}{\epsilon} \right| = \frac{1}{|\,f'(\alpha)\,|}$$

- Siano $f'(\alpha) = 0$, $f''(\alpha) \neq 0$ e $[a, b]$ un intorno di α in cui sia ragionevole l'approssimazione:

$$f(x) \approx \tfrac{1}{2}\,f''(\alpha)(x - \alpha)^2$$

In questo caso, schematizzato al centro in Figura 1 il condizionamento è *pessimo*: per quanto piccolo sia ϵ, il grafico di g potrebbe essere compreso tra le curve nera e rossa e g non avere zeri in $[a, b]$. Una piccola perturbazione di f può far "scomparire" l'oggetto da approssimare.

- Siano $f'(\alpha) = f''(\alpha) = 0, f^{(3)}(\alpha) \neq 0$, $[a, b]$ un intorno di α in cui sia ragionevole l'approssimazione:

$$f(x) \approx \tfrac{1}{6}\,f^{(3)}(\alpha)(x - \alpha)^3$$

e ϵ tale che $|\,f(a)\,|, |\,f(b)\,| > \epsilon$. Anche in questo caso, schematizzato a destra in Figura 1, g ha certamente qualche zero in $[a, b]$. Il più piccolo intervallo che certamente contiene gli zeri di g è quello di estremi le intersezioni con l'asse delle ascisse delle curve rossa e blu. Dunque:

nel peggiore dei casi g ha uno zero che dista da α circa: $k\,\sqrt[3]{\epsilon}$ con $k = \sqrt[3]{6/|\,f^{(3)}(\alpha)\,|}$

Lo scostamento è proporzionale alla *radice cubica* di ϵ e il calcolo di α è *mal condizionato*:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left| \frac{\text{scostamento}}{\epsilon} \right| = +\infty$$

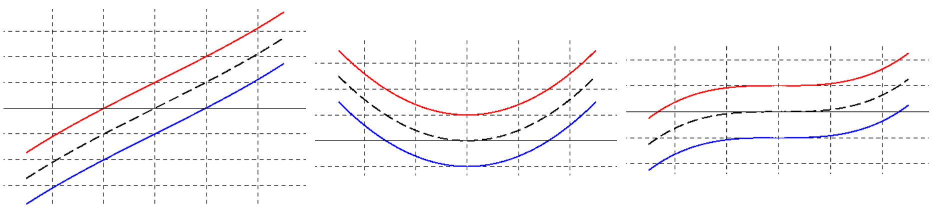

Figura 1:

Da questi esempi si deduce che *l'unico caso in cui il calcolo di α è ben condizionato è quello in cui $f'(\alpha)$ è non troppo piccolo.*

Esercizi

---

1. Si consideri la procedura seguente:

    - $z = \mathit{Calcola}\,(p, t)$

// $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione polinomiale definita da:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \quad , \quad a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$$

// t numero reale;
$w_0 = 1; v_0 = a_0$;
`per` $k = 1, \ldots, n$ `ripeti`:
  $w_k = t\, w_{k-1}$;
  $v_k = a_k\, w_k + v_{k-1}$;
$z = v_n$

Verificare che per $n = 4$ l'assegnamento $z = \mathit{Calcola}\,(p, t)$ restituisce:

$$z = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 = p(t)$$

Infine, determinare il numero di operazioni richieste, nel caso generale, da $\mathit{Calcola}\,(p, t)$.

2. Discutere il condizionamento nel caso $f'(\alpha) = 0$, $f''(\alpha) \neq 0$ e g *ha* qualche zero.

3. Siano $f_1(x) = x - 2$ e $f_3(x) = (x - 2)^3$. Posto $\alpha = 2$:

   - Constatare che $f_1'(\alpha) \neq 0$, calcolare gli zeri di $f_1(x) + \epsilon$ e $f_1(x) - \epsilon$ e determinarne la distanza da α in funzione di ϵ.
   - Constatare che $f_3'(\alpha) = f_3''(\alpha) = 0$, $f_3'''(\alpha) \neq 0$, calcolare gli zeri di $f_3(x) + \epsilon$ e $f_3(x) - \epsilon$ e determinarne la distanza da α in funzione di ϵ.
   - Calcolare i rapporti tra la distanza ottenuta ed ϵ per $\epsilon = 10^{-k}, k = 1, 5, 10$.